Esame di Regolazione e Controllo dei Sistemi Meccanici – 21–2–2001

Nome e Cognome:						
Anno di frequenza:						
Numero di matricola						
	–	–	$= \alpha - 1$	$= \beta - 1$	$= \gamma - 1$	$= \delta - 1$

A (pt. 5) Per descrivere la dinamica delle sospensioni di un veicolo che si muove su terreno sconnesso, si può fare uso, in prima approssimazione, del cosidetto modello “quarter car,” mostrato nella figura seguente:

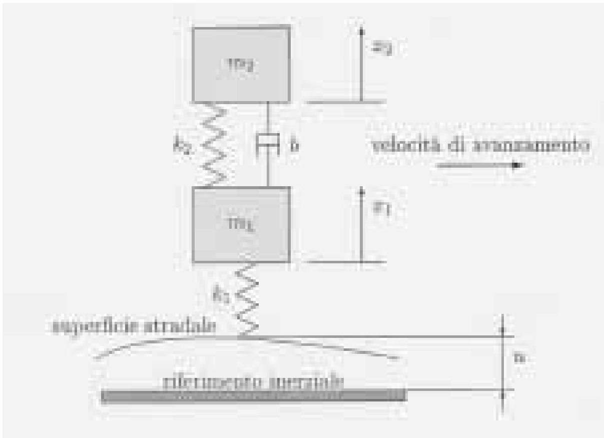


Figure 1: Modello “quarter car.”

Tale modello utilizza una massa m_2 pari ad $\frac{1}{4}$ della massa complessiva del veicolo ed una massa m_1 che rappresenta la massa della ruota e la massa ridotta della sospensione. La rigidezza e lo smorzamento dell'ammortizzatore sono modellati con le costanti k_2 ed b rispettivamente, mentre il contatto della ruota con il suolo è modellato con una semplice rigidezza k_1. L'avanzamento del veicolo fa sí che la posizione dell'appoggio della ruota sul terreno vari rispetto ad un riferimento inerziale e quindi $u(t)$ è la variabile di ingresso per il sistema mentre, ai fini della valutazione del comfort del veicolo, sono importanti la variabile x_2 insieme alla sua derivata prima, che si considerano come uscita.

Scrivere il modello del sistema in forma di stato, oppure di funzione di trasferimento tra il disturbo u e le uscite x_2 e $\dot{x}_2$.

- Dato il sistema caratterizzato dalla seguente f.d.t.:

$$G(s) = \frac{s+\alpha}{(s^2 - s + 4)(s+\beta)}$$

B (pt. 3) Scrivere le matrici **A**, **B**, **C**, **D** di una realizzazione nello spazio degli stati;

C-N (pt. 6) Discutere la raggiungibilitá e la osservabilitá del sistema. Trovare i modi del sistema e descriverne graficamente l'evoluzione temporale;

C-V (pt. 6) Tracciare i diagrammi di Bode, Nyquist e Nichols;

D (pt. 5) Dire se e, in caso affermativo, sotto quali condizioni tale sistema risulta stabile con una retrozione statica dell'uscita con costante $K > 0$.

E (pt. 6) Per il sistema $G(s) = \frac{10\gamma}{(\alpha s+1)(0.01\beta s+1)}$, progettare un controllore che realizzi in prima approssimazione le seguenti specifiche:

- errore a regime al gradino nullo;
- errore a regime alla rampa ≤ 0.01 %;
- margine di fase di circa $\pi/4$;
- banda passante in anello chiuso compresa tra 100 e 200 (rad/sec);

- Dato il sistema $G(s) = \frac{10\delta(s+15)}{(s+\gamma)^2(s-0.1\beta)}$

F (pt. 3) tracciare i diagrammi di Nyquist e Nichols;

G (pt. 2) disegnare qualitativamente i luoghi a modulo costante pari a $M = \alpha$ dB e $M = -\alpha$ dB sui diagramma di Nyquist e di Nichols;

H (pt. 3) Studiare la stabilitá del sistema in anello chiuso con il criterio di Nyquist.

Soluzione

A) Il modello matematico del sistema può essere ottenuto scrivendo l'equazione di Newton proiettata lungo l'asse verticale per ognuna delle due masse m_1 ed m_2. Dette x_1 e x_2 le variabili che rappresentano lo spostamento delle due masse rispetto alle posizioni di equilibrio, il risultato è quello descritto nelle equazioni seguenti:

$$\begin{aligned} k_1(x_1-u)+m_1\ddot{x}_1+k_2(x_1-x_2)+b(\dot{x}_1-\dot{x}_2) &= 0 \\ k_2(x_2-x_1)+b(\dot{x}_2-\dot{x}_1)+m_2\ddot{x}_2 &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

I vettori di stato $\mathbf{z}$ e di uscita $\mathbf{y}$ possono essere scelti nel seguente modo:

$$\mathbf{z}=\begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y}=\begin{bmatrix} x_2 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$$

dunque le matrici della rappresentazione in forma di stato sono:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & -\frac{b}{m_1} & -\frac{k_2}{m_1} & \frac{b}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{b}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & -\frac{b}{m_2} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 0 \\ k_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D}=0$$

Trasformando invece le equazioni secondo Laplace, si ottiene

$$\mathcal{L}(x_2)=\frac{k_1(bs+K_2)}{(m_1s^2+b_s+k_1+k_2)(m_2s^2+b_s+k_2)-(bs+k_2)^2}\mathcal{L}(u)=G(s)\mathcal{L}(u)$$

e naturalmente $\mathcal{L}(\dot{x}_2)=sG(s)\mathcal{L}(u)$.

B) Esprimendo la funzione di trasferimento nella forma:

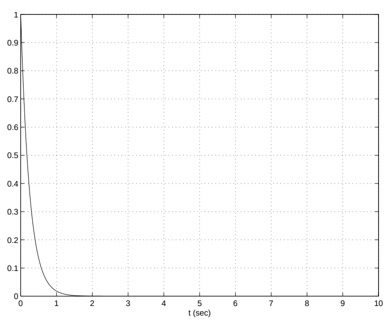
$$G(s)=\frac{s+\alpha}{s^3+(\beta-1)s^2+(4-\beta)s+4\beta}$$

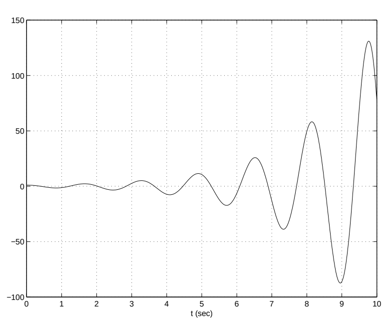
si puó scrivere una rappresentazione di stato nella forma canonica di controllo, ossia

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4\beta & \beta-4 & 1-\beta \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

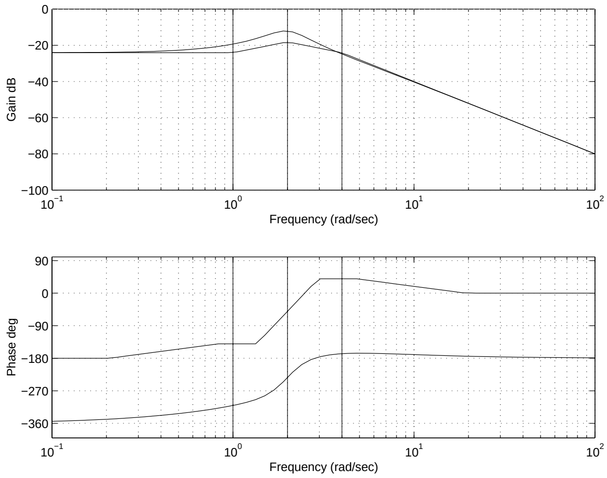
$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D}=0$$

C-N) Il sistema sopra descritto é, per definizione, completamente raggiungibile mentre risulta completamente osservabile se é in forma minima; pertanto se $\alpha=\beta$ il sistema non é completamente osservabile. Il sistema presenta un polo reale negativo in $-\beta$ ed una coppia di poli complessi coniugati con parte reale positiva in $\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{15}}{2}$. Pertanto il sistema é instabile. I modi del sistema sono $e^{-\beta t}$, che é l'esponenziale decrescente corrispondente al polo reale, ed $e^{t/2}cos\sqrt{15}t$, che é l'oscillazione ad ampiezza crescente esponenzialmente, che corrisponde ai poli complessi coniugati con parte reale positiva. Le figure seguenti descrivono l'andamento temporale dei due modi per $\beta=4$

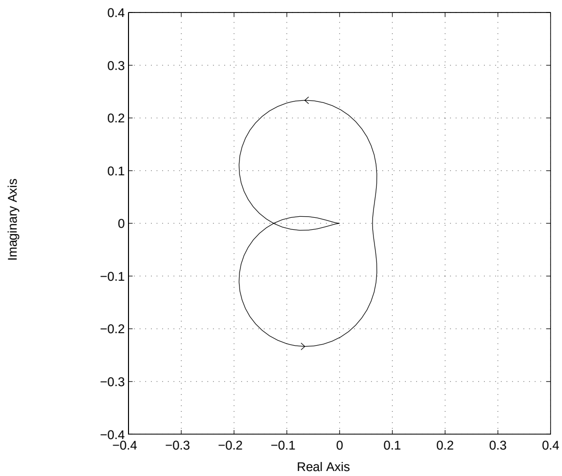




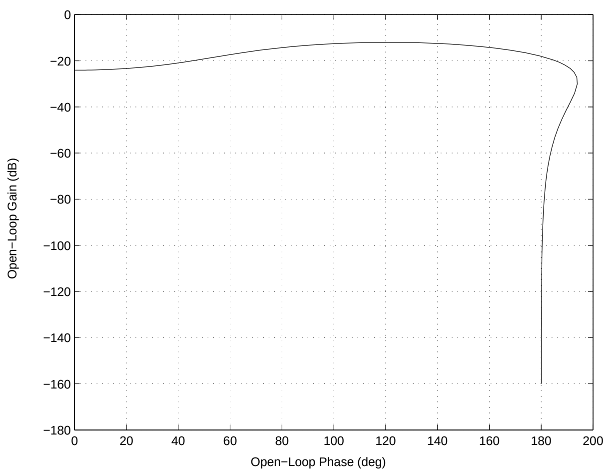
C-V) Si vedano le figure seguenti, che riportano esempi di diagrammi di Bode, Nyquist e Nichols per $\alpha = 1$ e $\beta = 4$.



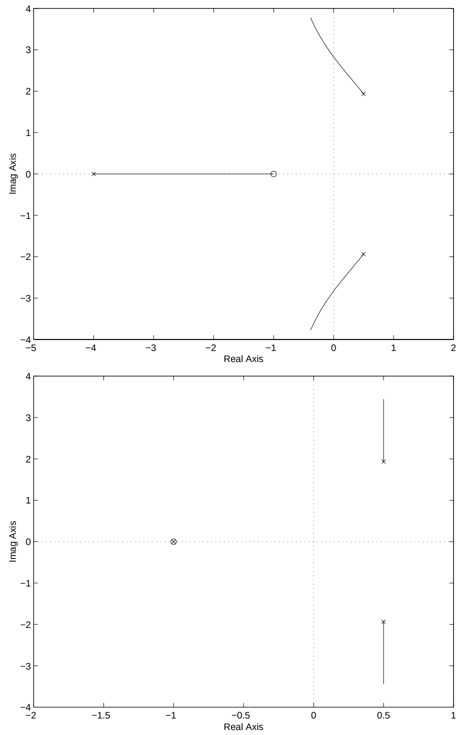
Nyquist Diagrams



Nichols Charts



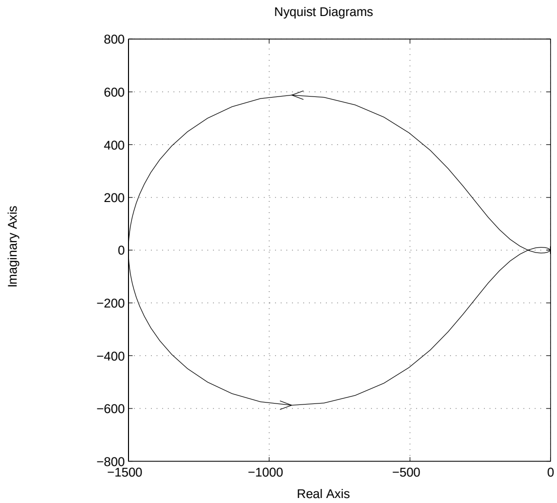
D) Si può tracciare il luogo delle radici del sistema, il quale presenta due asintoti verticali in corrispondenza del valore reale $\frac{1-\beta+\alpha}{2}$: dunque se $1-\beta+\alpha<0$ é possibile trovare un valore sufficientemente grande di K da portare i poli del sistema a ciclo chiuso nel semipiano a parte reale negativa, altrimenti no. Nel caso particolare $\alpha=\beta$, gli asintoti verticali coincidono con i rami vericali del luogo che si dipartono dalla coppia di poli complessi coniugati a parte reale positiva, dunque non é possibile rendere stabile tale sistema con una semplice retroazione statica dell'uscita. Le figure sotto riportate descrivono i luoghi delle radici per $\alpha=1$ e $\beta=4$ e per $\alpha=\beta=1$.

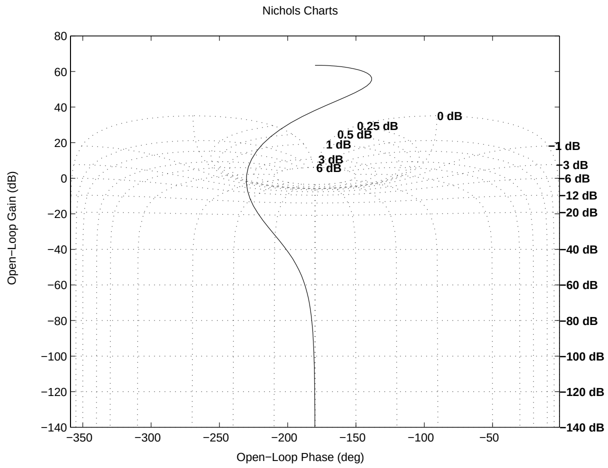


E) Il sistema presenta un polo in $-\frac{1}{\alpha}$ ed un polo in $-\frac{100}{\beta}$; poiché entrambi i poli hanno parte reale negativa, si puo' procedere semplicemente con la sintesi sui diagrammi di Bode o con il metodo della sintesi diretta. Fissiamo un controllore $C(s)=\frac{K}{s^t}C_0(s)$, con $C(0)=1$. Le specifiche statiche richiedono un integratore ($t=1$); la costante K viene determinata in base al requisito sull'errore a regime sulla rampa: tale errore è pari a $\frac{1}{K10\gamma}$, quindi occorre che sia $K\geq\frac{10}{\gamma}$. Per rispettare il requisito sul margine di fase e la banda passante, si può fare in modo che il polo non nullo a modulo minore coincida proprio con la pulsazione di taglio. Quindi $C_0(s)$ deve avere due zeri uguali ai poli della $G(s)$. Per $K=\frac{10}{\gamma}$ la pulsazione di taglio, in assenza di singolarità <100 rad/sec sarebbe appunto 100 rad/sec. Scegliendo $\frac{10}{\gamma}<K<\frac{20}{\gamma}$ si ottiene una pulsazione di taglio compresa tra 100 e 200 rad/sec. Ad esempio, scegliendo $K=\frac{15}{\gamma}$ si ottiene una pulsazione di taglio pari a 150 rad/sec. In corrispondenza di tale pulsazione si può collocare un polo, cosicchè il diagramma di Bode del sistema complessivo $G(s)C(s)$ in anello aperto presenti un "ginocchio" in corrispondenza della pulsazione di taglio. La funzione di trasferimento complessiva del controllore è la seguente:

$$C(s)=\frac{15/\gamma(\alpha s+1)(0.01\beta s+1)}{s(\frac{s}{150}+1)}$$

F) Il sistema presenta un polo reale positivo semplice in 0.1β e un polo reale positivo a molteplicitá 2 in γ. Un esempio di diagrammi di Nyquist e Nichols é riportato nelle figure sottostanti per $\beta = \gamma = \delta = 1$..





G) I luoghi a modulo costante pari a M dB nel diagramma di Nyquist sono cerchi centrati sul semiasse reale a destra dell'origine se $M < 0$, a sinistra del punto -1 se $M > 0$. Sia m il valore del modulo (non in dB): l'ascissa del centro dei cerchi é pari a $\frac{m^2}{1-m^2}$ e il raggio é pari a $\frac{m}{|1-m^2|}$. Sul diagramma di Nichols, se $M < 0$ il luogo é una curva oscillante tra un massimo in corrispondenza della fase $\phi = 0(mod 2\pi)$ e un minimo in corrispondenza della fase $\phi = -\pi$; se $M > 0$ il luogo é una curva chiusa che contiene il punto $(0dB, \pi)$.

H) Poiché il sistema di partenza ha un polo reale negativo, affinché il sistema a ciclo chiuso sia stabile, il diagramma di Nyquist del sistema a ciclo aperto deve circondare 1 volta il punto $(-1, 0)$ in senso antiorario. Se ció non accade, il sistema a ciclo chiuso é instabile. Nell'esempio di figura, il punto $(-1, 0)$ viene circondato 1 volta ma in senso orario, quindi in tale caso il sistema a ciclo chiuso é instabile.