**Esame di Regolazione e Controllo dei Sistemi Meccanici – 7–6–2001**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Nome e Cognome: | | | | | | |
| Anno di frequenza: | | | | | | |
| Numero di matricola | | | | | | |
| | – | – | $=\alpha-1$ | $=\beta-1$ | $=\gamma-1$ | $=\delta-1$ |

**A (pt. 3)** Tracciare i diagrammi di Bode, Nyquist e Nichols relativi al sistema:

$$G(s) = \frac{(2\alpha s + 1)}{(0.01s^2 + 0.1s + 1)(0.001\beta s + 1)}$$

indicando i valori nei punti salienti del primo.

- Dato il sistema caratterizzato dalla seguente f.d.t.:

$$G(s) = \frac{s + \gamma}{(s^2 - 2s + 10)(s + \delta)^2}$$

**B (pt. 3)** Scrivere le matrici **A**, **B**, **C**, **D** di una realizzazione minima nello spazio degli stati;

**C-N (pt. 2)** Trovare i modi del sistema e descriverne graficamente l'evoluzione temporale;

**D (pt. 5)** Dire se e, in caso affermativo, sotto quali condizioni tale sistema risulta stabile con una retrozione statica dell'uscita $u = Ky$.

**E-N (pt. 5)** È possibile costruire una retroazione della uscita che allochi tutti i poli del sistema in anello chiuso in una posizione desiderata? Se sì, descrivere la procedura per costruire tale retroazione.

**F-V (pt. 4)** Tracciare sul piano di Nichols il diagramma della risposta armonica in anello aperto di un sistema compatibile con le seguenti caratteristiche in anello chiuso (motivando le scelte adottate):

- errore a regime della risposta al gradino unitario $\leq .1\%$;
- margine di fase $\geq \pi/4$;
- margine di ampiezza $\geq$ 6dB;
- picco di risonanza $\leq$ 3dB;

**G-V (pt. 3)** disegnare qualitativamente i luoghi a modulo costante pari a $M = \beta$ dB e $M = -\beta$ dB sui diagramma di Nyquist e di Nichols;

**H (pt. 6)** Per il sistema di cui al punto **A**, progettare un controllore che realizzi in prima approssimazione le seguenti specifiche:

- errore a regime al gradino $\leq 1$ %;
- margine di fase $\geq \pi/4$;
- banda passante in anello chiuso compresa tra $10^4\alpha$ e $510^4\alpha$;

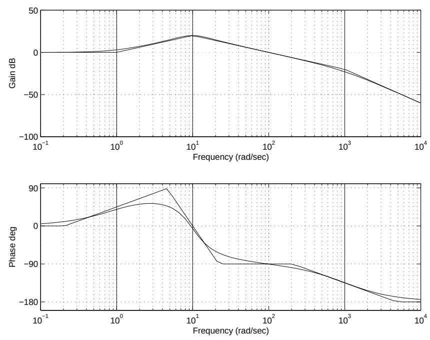
**I (pt. 6)** Per il sistema di cui al punto **A**, progettare un controllore che realizzi in prima approssimazione le seguenti specifiche:

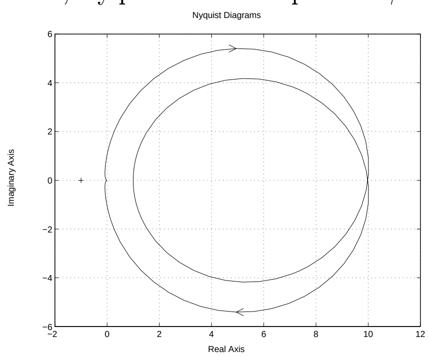
- errore a regime al gradino $\leq 1$ %;
- margine di fase $\geq \pi/4$;
- banda passante in anello chiuso compresa tra 50 e 150 $rad/sec$.

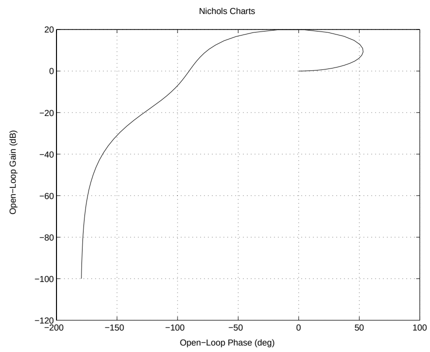
**Soluzione**

**A)** Il sistema è già descritto in forma di Bode. La costante di guadagno statico è unitaria (quidni il contributo in ampiezza è di $0db$. Procedendo per pulsazioni crescenti, si trovano i contributi di uno zero in $-1/2\alpha$, di una coppia di poli complessi coniugati in $-2.5 \pm \jmath 9.6825$ (cioè con pulsazione naturale $\omega_n = 10$ e coefficiente di smorzamento $\zeta = 1/2$), e di un polo in $-1000/\beta$. Il sistema è a fase minima, per cui il diagramma delle fasi potrebbe essere interamente dedotto a partire dalla conoscenza del diagramma delle ampiezze mediante la Formula di Bode. Alcuni punti caratteristici del diagramma asintotico (non reale) delle ampiezze sono i seguenti: il massimo del diagramma si trova alla pulsazione 10, ed il picco vale (in $db$) $|G(\jmath 10)| = 20(\mathsf{Log}\,10 - \mathsf{Log}\,1/2\alpha) = 20Log(20\alpha)$. Nel ginocchio tra pendenza $-1$ e $-2$, il modulo vale $b = a - 20(\mathsf{Log}\,\frac{1000}{\beta} - \mathsf{Log}\,10) = 20\,\mathsf{Log}\,\frac{\alpha\beta}{5}$. Quindi, se $b \leq 0$ (cioè se $\alpha\beta \leq 5$, il diagramma asintotico taglia l'asse a $0db$ alla pulsazione $\omega_T$ ottenuta risolvendo $a = 20(\mathsf{Log}\,\omega_T - \mathsf{Log}\,10)$, cioè $\omega_T = 200\alpha$. Se invece $b \geq 0$ (cioè se $\alpha\beta \geq 5$), la pulsazione di taglio si ottiene risolvendo $b = 40(\mathsf{Log}\,\omega_T - \mathsf{Log}\,\frac{1000}{\beta})$, cioè $\omega_T = 1000\sqrt{\frac{\alpha}{5\beta}}$.

I diagrammi di Nyquist e Nichols sono ottenuti da quello di Bode senza alcuna difficoltà. Le figure seguenti riportano esempi di diagrammi di Bode, Nyquist e Nichols per $\alpha = \beta = 1$.




**B)** Esprimendo la funzione di trasferimento nella forma:

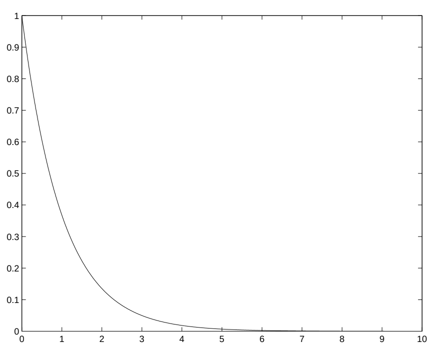
$$G(s) = \frac{s + \gamma}{s^4 + 2(\delta - 1)s^3 + (10 - 4\delta + \delta^2)s^2 + 2\delta(10 - \delta)s + 10\delta^2}$$

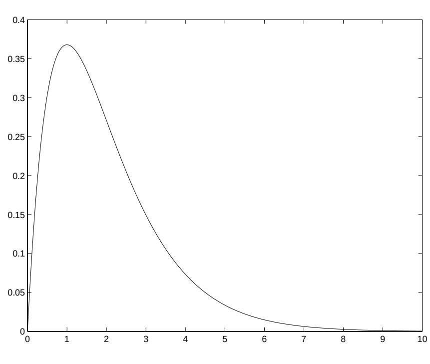
si puó scrivere una rappresentazione di stato nella forma canonica di controllo, ossia

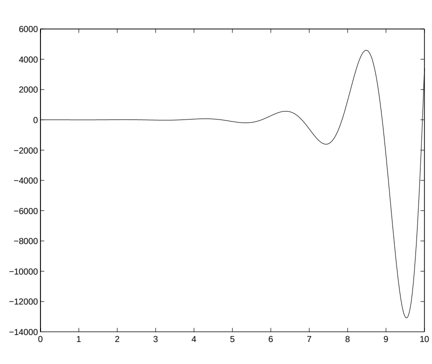
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -10\delta^2 & 2\delta(\delta - 10) & -10 + 4\delta - \delta^2 & 2(1 - \delta) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \gamma & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = 0$$

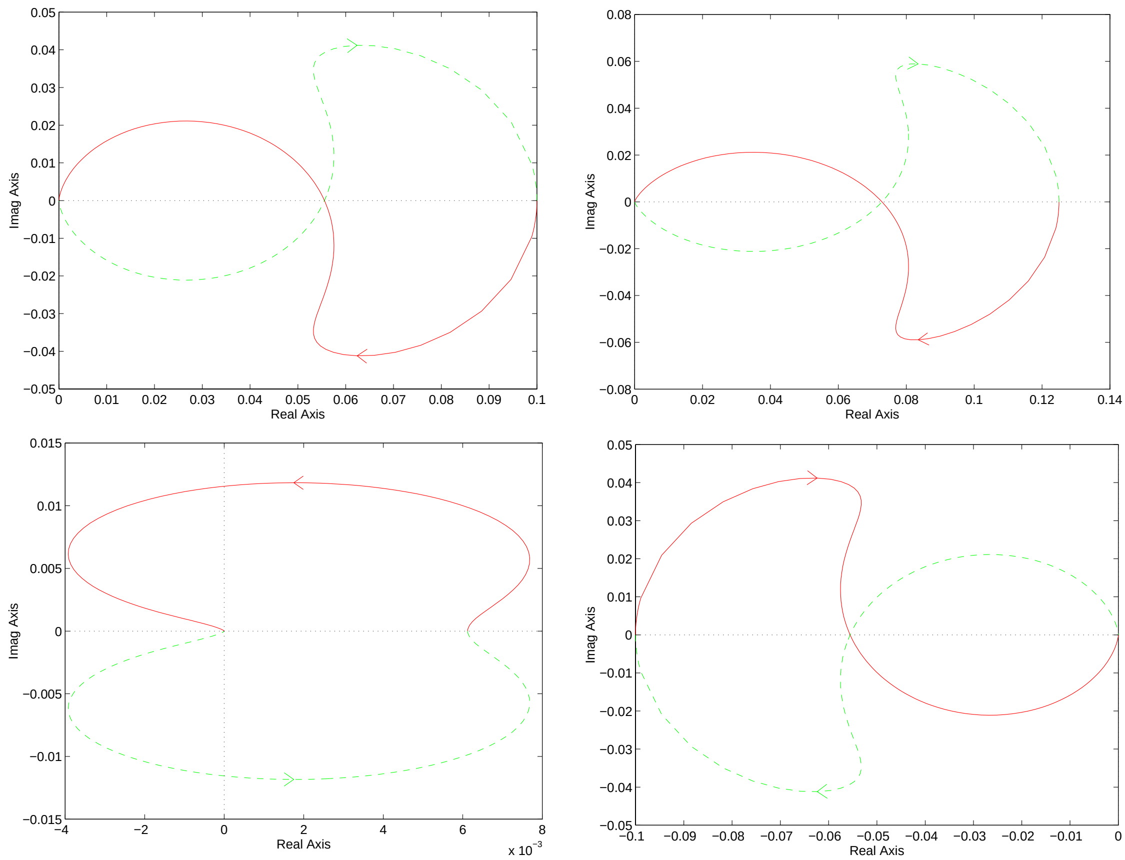
**C)** Il sistema presenta un polo doppio reale negativo in $-\delta$ ed una coppia di poli complessi coniugati con parte reale positiva in $1 \pm 3i$. Pertanto il sistema é instabile. I modi del sistema sono $e^{-\delta t}$ e $te^{-\delta t}$, che corrispondono al polo reale doppio, ed $e^t cos 3t$, che é l'oscillazione ad ampiezza crescente esponenzialmente, che corrisponde ai poli complessi coniugati con parte reale positiva. Le figure seguenti descrivono l'andamento temporale dei due modi per $\delta = 1$



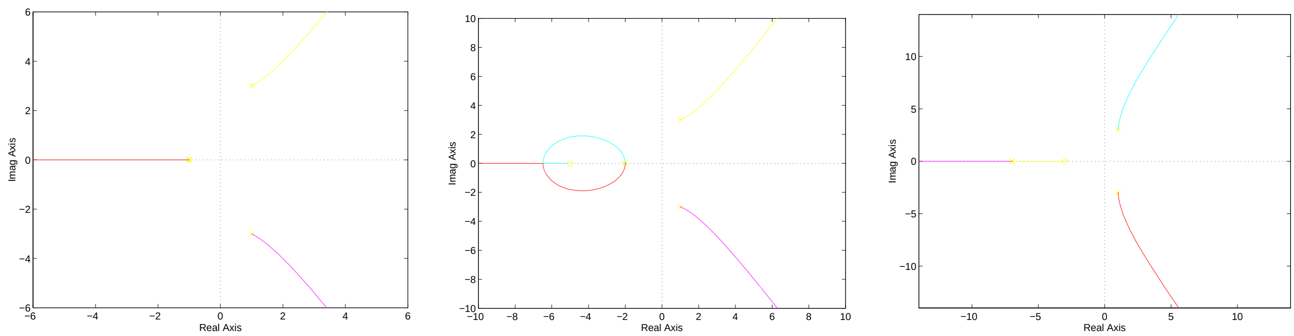




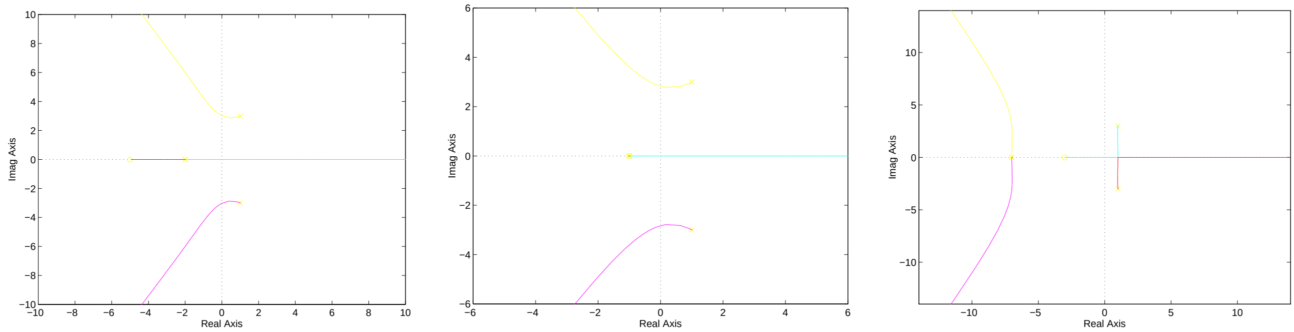
**D)** Si può procedere usando la tecnica del luogo delle radici ovvero il teorema di Nyquist. Nel secondo caso si deve tenere conto che vi sono due poli a parte reale positiva, sono quindi necessari, ai fini della stabilità in anello chiuso, due circondamenti in senso antiorario del punto $-1$ da parte del diagramma di $KG(\jmath\omega)$, o, il chè è evidentemente lo stesso, del punto $-1/K$ da parte del diagramma di $G(\jmath\omega)$. Tale diagramma non abbraccia alcuna parte dell'asse negativo, quindi reazioni negative non stabilizzano mai il sistema. Se si utilizza una reazione positiva, si ha un circondamento positivo, che comunque è insufficiente. Il sistema pertanto non può mai essere stabilizzato con una retroazione costante delle uscite. I diagrammi di Nyquist della $G(s)$ sono sotto riportati a titolo di esempio per i casi $(\gamma = 1, \delta = 1)$ $(\gamma = 5, \delta = 2)$, e $(\gamma = 3, \delta = 7)$. È anche riportato (in basso a destra) il diagramma della $-G(s)$ per lo studio della reazione positiva nel primo caso.




Per quanto riguarda lo studio col luogo delle radici, esistono vari casi a seconda dei valori di $\gamma$ e $\delta$: in ogni caso, tale luogo presenta 3 asintoti che per $K$ positivo sono inclinati di $\pi/3$, $\pi$ e $5\pi/3$. Quindi per elevati valori di $K$ il sistema a ciclo chiuso é sicuramente instabile. Essendo il sistema a ciclo aperto instabile, anche per piccoli valori di K si avrá instabilitá. Nelle figure seguenti è riportato il luogo richiesto nei casi $(\gamma = 1, \delta = 1)$ $(\gamma = 5, \delta = 2)$, e $(\gamma = 3, \delta = 7)$.




Lo studio nel caso di reazione negativa richiede l'applicazione delle regole opportune. Divengono parte del luogo delle radici i tratti dell'asse reale che lasciano a destra un numero pari o nullo di singolarità, e gli asintoti sono simmetrici rispetto al caso precedente. I diagrammi per i casi sopra detti sono riportati sotto




Da questi diagrammi si osserva che i rami che partono dai poli instabili in anello aperto divengono stabili per $K < \bar{K} < 0$ negativa sufficientemente elevata, mentre il ramo che aprte dal polo stabile diviene instabile per $K < \hat{K} < 0$. La possibilità di stabilizzare dipende quindi dal rapporto tra $\bar{K}$ e $\hat{K}$. Si può vedere, con una graduazione accurata del diagramma, che in effetti è $\bar{K} < \hat{K}$, quindi non si ha nessun valore di $K$ che stabilizza.

Questo risultato dalla analisi col luogo delle radici concorda in pieno con quello mediante teorema di Nyquist.

**E)** Il sistema, scritto in una delle forme canoniche di raggiungibilità o di osservabilità ha, per definizione, la corrispondente proprietà caratteristica, mentre risulta avere anche l'altra se e solo se é una realizzazione minima, ovvero se non ci sono cancellazioni nella f.d.t.. Pertanto, usando ad esempio la realizzazione di cui sopra, solo per $\gamma = \delta$ il sistema non é completamente osservabile. Eccettuato questo caso, è sempre possibile costrure un controllore che alloca tutti i poli in posizione desiderata. Si può procedere ad esempio secondo la tecnica di sintesi del regolatore descritta nelle dispense.

**F)** Dalle prime due specifiche si evince che il sistema deve presentare un guadagno statico almeno pari a 1000, ovvero il diagramma di Nichols parte dal punto con ascissa 0 e ordinata $\geq 60$ dB. Il requisito sul margine di fase impone che la retta orizzontale a 0 dB sia intersecata per un valore della fase che giace a destra del valore $-\pi$ per almeno $\frac{\pi}{4}$, mentre il requisito sul margine di ampiezza richiede che la retta verticale a $-\pi$ sia intesecata al di sotto dell'asse orizzontale a 0 dB di una quantitá pari almeno a 6 dB. L'ultimo requisito richiede che il diagramma di Nichols sia al piú tangente al luogo a 3 dB, oppure non lo intersechi affatto.

**G)** I luoghi a modulo costante pari a M dB nel diagramma di Nyquist sono cerchi centrati sul semiasse reale a destra dell'origine se $M < 0$, a sinistra del punto $-1$ se $M > 0$. Sia $m$ il valore del modulo (non in dB): l'ascissa del centro dei cerchi é pari a $\frac{m^2}{1-m^2}$ e il raggio é pari a $\frac{m}{|1-m^2|}$. Sul diagramma di Nichols, se $M < 0$ il luogo é una curva oscillante tra un massimo in corrispondenza della fase $\phi = 0(mod 2\pi)$ e un minimo in corrispondenza della fase $\phi = -\pi$; se $M > 0$ il luogo é una curva chiusa che contiene il punto $(0dB, \pi)$.

**H)** Poiché il sistema é a fase minima, si puo' procedere semplicemente con la sintesi sui diagrammi di Bode. Fissiamo un controllore $C(s) = \frac{K}{s^t} C_0(s)$, con $C_0(0) = 1$. Per le specifiche statiche non è richiesto di aumentare il tipo del sistema, quindi poniamo $t = 0$. La costante $K$ viene determinata in base al requisito sull'errore a regime sul gradino: tale errore è pari a $\frac{1}{1+K}$, quindi occorre che sia $K \geq 99$. Scegliamo $K = 100$.

La prima scelta da fare per quanto riguarda la parte dinamica del controllore riguarda il tipo di azione che è richiesta, in particolare se si ha bisogno di anticipo o di attenuazione. Nel problema in considerazione, il sistema (dopo la compensazione statica) ha un diagramma di Bode che è semplicemente traslato di $40db$ verso l'alto rispetto a quello studiato nel punto precedente. La pulsazione di taglio $\omega'_T$ si trova perciò adesso sempre nel tratto a pendenza $-2$ e il suo valore è traslato di una decade rispetto a quello ottenuto per il sistema prima della compensazione statica, $\omega'_T = 10\omega_T = 10^4 \sqrt{\frac{\alpha}{5\beta}}$. Al variare di $\alpha, \beta$ si hanno pulsazioni di taglio che variano tra $10^3\sqrt{2}$ e $10^4\sqrt{2}$, quindi in ogni caso la banda passante del sistema senza compensazione dinamica è scarsa rispetto alle specifiche. Inoltre, il margine di fase (indicato dalla pendenza nella pulsazione di taglio) è insufficiente. Si dovrà quindi scegliere una azione anticipatrice. Ponendo ad esempio uno zero in $\frac{-1000}{\beta}$ si cancella il polo lì esistente, e si ottiene una nuova pulsazione di taglio a $2 * 10^4 \alpha$, che soddisfa la specifica di banda passante. Ponendo un polo con costante di tempo esattamente pari a $(2 * 10^4 \alpha)^{-1}$, si ha un margine di fase sufficiente, ed un controllore causale che soddisfa le specifiche espresso da

$$C(s) = 100 \frac{0.001\beta s + 1}{10^{-4} \frac{0.5}{\alpha} s + 1}$$

**I)** Il progetto differisce dal precedente solo nella parte dinamica. In questo caso, il tipo di azione correttrice necessaria per rispettare il requisito sulla banda passante è di attenuazione alle basse frequenze. Possiamo procedere ad esempio come segue: si cancella lo zero con un polo in $-\frac{1}{2\alpha}$ e si introduce uno zero in $-10$. Cosí/ facendo la banda passante è diminuita, ma risulta ancora troppo elevata, poiché la pulsazione di taglio risulta all'incirca pari a 1000 $rad/sec$. Volendo una pulsazione di taglio di una decade piú bassa (100 rad/sec) si puó utilizzare una ulteriore azione attenuatrice in bassa frequenza, ad esempio con un polo in 0.1 ed uno zero in 1. Questa fa sì che, alle frequenze intorno a quelle di nostro interesse per la banda passante, le ampiezze siano attenuate di circa $20db$. Se $\beta = 10$, la nuova pulsazione di taglio coincide con il secondo polo del sistema, e si ha quindi un margine di fase di $\pi/4$. Se $\beta < 10$, il secondo polo é maggiore della pulsazione di taglio e si ha un margine di fase $> \pi/4$ e $\leq \pi/2$. La funzione di trasferimento complessiva del controllore è la seguente:

$$C(s) = \frac{100(0.1s+1)(s+1)}{(2\alpha s+1)(10s+1)}$$