Esame di Regolazione e Controllo dei Sistemi Meccanici –17– 1–2002

Nome e Cognome:						
Anno di frequenza:						
Numero di matricola						
	–	–	$= \alpha - 1$	$= \beta - 1$	$= \gamma - 1$	$= \delta - 1$

A (pt. 3) Tracciare i diagrammi di Bode, Nyquist e Nichols relativi al sistema:

$$G(s) = \frac{15(s+1)}{(0.05\alpha s+1)(10s+1)(0.0001\beta s^2+0.01s+1)}$$

indicando i valori nei punti salienti del primo.

B (pt. 8) Per il sistema di cui al punto **A**, progettare un controllore che realizzi in prima approssimazione le seguenti specifiche:

- errore a regime al gradino ≤ 1 %;
- margine di fase $\geq \pi/4$;
- banda passante in anello chiuso compresa tra 1000 e 3000 rad/sec.

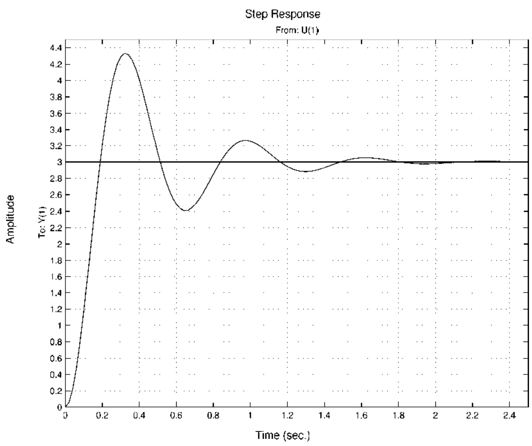
Dato il sistema tempo-discreto caratterizzato dalla seguente f.d.t.:

$$G(z) = \frac{z+1}{(z^2+0.2z+0.4)(z-0.25\gamma)(z+0.01\delta)}$$

C (pt. 4) Discutere la stabilitá del sistema al variare dei parametri; trovare i modi del sistema e descriverne graficamente l'evoluzione temporale;

D (pt. 4) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici nel caso di retroazione unitaria sia negativa che positiva e per guadagni K variabili fra 0 e $+\infty$.

E (pt. 4) Ricavare empiricamente le caratteristiche della Funzione di Trasferimento del sistema TC più semplice compatibile con la risposta al gradino raffigurata di seguito.



Con riferimento al sistema

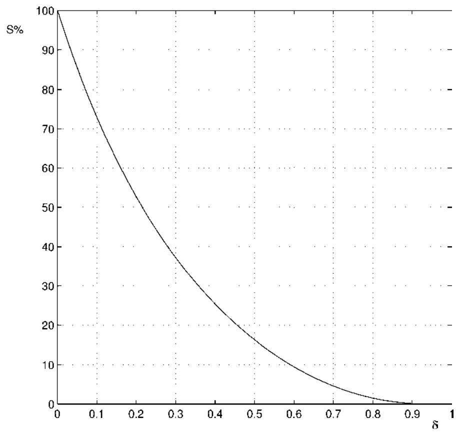
$$\alpha\ddot{x} + \beta\dot{x}^4 + \cos^2(x) = u$$

F (pt. 2) Scrivere una realizzazione del sistema nello spazio degli stati.

G (pt. 3) Trovare i punti di equilibrio con ingresso nullo, scrivere le matrici **A** e **B** del modello linearizzato attorno ad essi e studiare la stabilità dell'equilibrio in tali punti.

H (pt. 3) Trovare un ingresso u che renda l'origine unico punto di equlibrio globalmente asintoticamente stabile.

Per la soluzione dell'esercizio **E** puó essere utile la figura seguente:

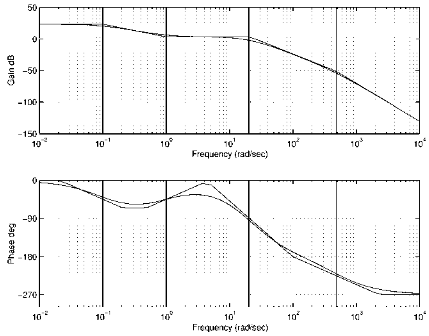


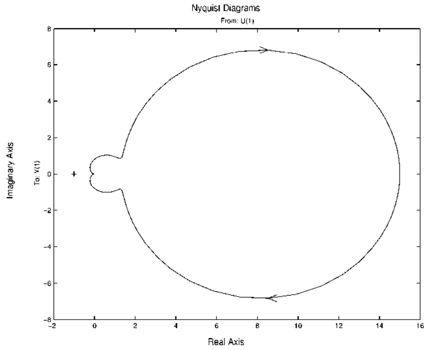
S%
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
δ

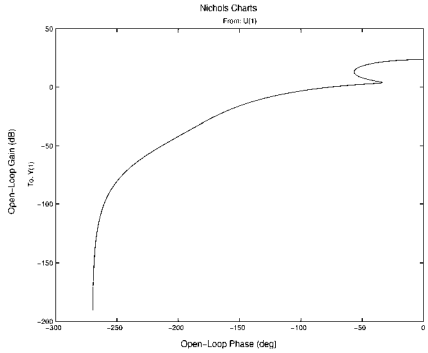
Soluzione

A) Il sistema è già descritto in forma di Bode. La costante di guadagno statico è 15 ossia 23.5 dB. Procedendo per pulsazioni crescenti, si trovano i contributi di un polo a pulsazione 0.1 rad/sec, lo zero a pulsazione 1 rad/sec, un secondo polo a pulsazione $\frac{20}{\alpha}$ rad/sec ($2 \leq \frac{20}{\alpha} \leq 20$) ed una coppia di poli complessi coniugati con pulsazione naturale $\omega_n = \frac{100}{\sqrt{\beta}}$ rad/sec ($31.62 \leq \omega_n \leq 100$) e coefficiente di smorzamento $\zeta = \frac{1}{2\sqrt{\beta}}$. Il sistema è a fase minima, quindi il diagramma delle fasi potrebbe essere interamente dedotto a partire dalla conoscenza del diagramma delle ampiezze mediante la Formula di Bode. La pulsazione di taglio è sicuramente compresa fra la pulsazione relativa al secondo polo e la pulsazione naturale della coppia di poli complessi coniugati, in quanto, in corrispondenza della pulsazione dello secondo polo, il modulo della risposta armonica é pari a 3.5dB. Il valore della pulsazione di taglio si ottiene risolvendo $20(\,\mathsf{Log}\,\omega_T - \,\mathsf{Log}\,\frac{20}{\alpha}) = 3.5$, cioè $\omega_T = \frac{30}{\alpha}$ rad/sec.

I diagrammi di Nyquist e Nichols sono ottenuti da quello di Bode senza alcuna difficoltà. Le figure seguenti riportano esempi di diagrammi di Bode, Nyquist e Nichols per $\alpha = \beta = 1$.

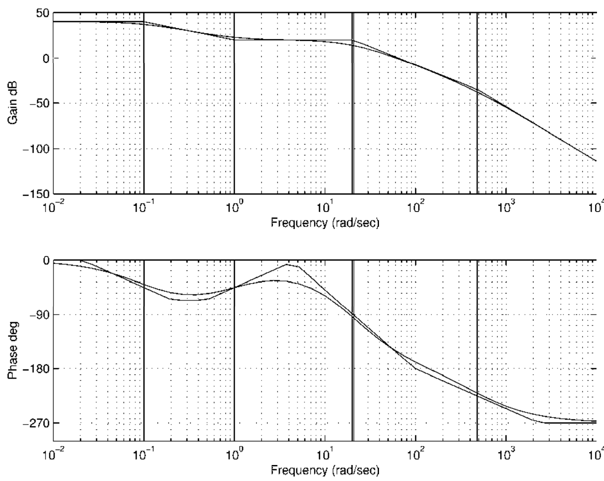






B) Poiché il sistema é a fase minima, si può procedere semplicemente con la sintesi sui diagrammi di Bode. Fissiamo un controllore $C(s) = \frac{K}{s^t} C_0(s)$, con $C_0(0) = 1$. Per soddisfare le specifiche statiche non è necessario alcun polo nell'origine, quindi poniamo $t = 0$. La costante K viene determinata in base al requisito sull'errore a regime sul gradino: tale errore è pari a $\frac{1}{K15}$, quindi occorre che sia $K \geq \frac{100}{15} \simeq 6.67$.

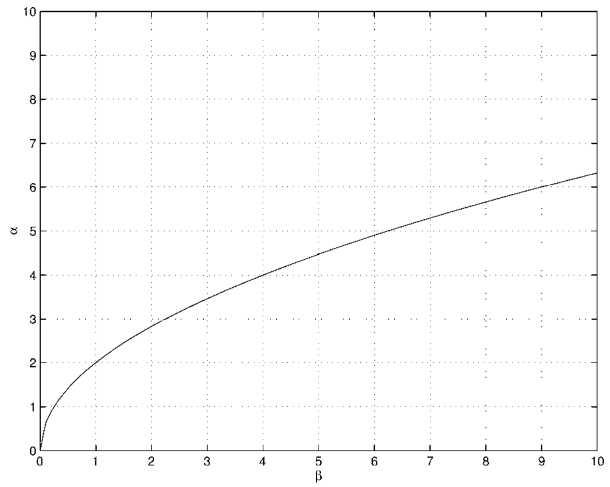
Se scegliamo $K = \frac{100}{15}$, il sistema (dopo la compensazione statica) ha un diagramma di Bode rappresentato nella figura seguente.



Non **e**' detto che la pulsazione di taglio rimanga inferiore alla pulsazione naturale relativa alla coppia di poli complessi coniugati. Ció accade solamente per quei valori dei parametri α e β per i quali vale $\frac{100}{\sqrt{\beta}} \geq 10\frac{20}{\sqrt{\alpha}}$ ossia

$$\alpha \geq 2\sqrt{\beta}$$

Le coppie (α, β) che soddisfano la relazione sopra giacciono nel piano (α, β) al di sopra o sulla curva riportata in figura seguente.



Per tali valori la pulsazione di taglio diventa $\omega'_T = \frac{200}{\alpha}$ e, tenuto conto del fatto che la equazione sopra ha soluzioni per $\alpha \geq 2$, il valore massimo di ω'_T si raggiunge per $\alpha = 2$ ed é pari a 100 rad/sec.

Negli altri casi, alla pulsazione $\frac{100}{\beta}$ vale $||G(j\frac{100}{\beta})|| = 20 \,\mathsf{Log}\left(\frac{5\alpha}{\sqrt{\beta}}\right)$. La pulsazione di taglio si trova dalla relazione $60\left(\mathsf{Log}\,\omega'_T - \mathsf{Log}\,\frac{100}{\beta}\right) = 20\,\mathsf{Log}\left(\frac{5\alpha}{\sqrt{\beta}}\right)$, ossia $\omega'_T = \left(\frac{5\alpha}{\beta^2}\right)^{\frac{1}{3}}$. Tale pulsazione é massima, tra le coppie (α, β) che non soddisfano la equazione sopra, ossia che giacciono sotto la curva della figura sopra, per $\alpha = \beta = 1$ ed in tal caso vale $\omega'_T \simeq 171$ rad/sec.

Dunque la specifica sulla pulsazione di taglio non risulta soddisfatta in ogni caso.

Una possibile soluzione consiste nel porre una coppia di zeri complessi coniugati a cancellare la coppia di poli complessi coniugati. In tale modo la pulsazione di taglio risulta in ogni caso pari a $\frac{200}{\alpha}$. Si puó a questo punto alzare il guadagno statico in modo da spostare tale pulsazione entro il range desiderato (ed in tal modo risulta automaticamente soddisfatto il vincolo sul margine di fase). Ad esempio, per collocare la pulsazione di taglio in 2000 rad/sec, occorre moltiplicare per un ulteriore fattore pari a 10α.

Infine, per rendere causale il controllore, occorre inserire 2 poli ad alta frequenza, ad esempio in -10000 rad/sec. Il controllore avrá dunque funzione di trasferimento pari a

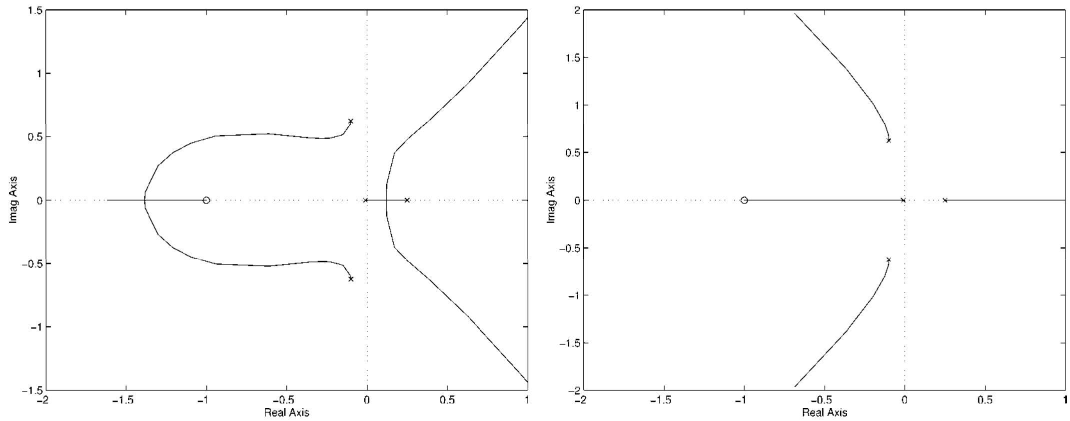
$$C(s) = 66.7\alpha\frac{(0.0001\beta s^2 + 0.01s + 1)}{s(0.0001s + 1)^2}$$

La funzione di trasferimento del sistema compensato é pari a:

$$G(s)C(s) = 1000\alpha\frac{(s+1)}{(0.05\alpha s + 1)(10s + 1)(0.0001s + 1)^2}$$

C) Il sistema presenta un polo reale negativo in 0.25γ, un altro polo reale in -0.01δ ed una coppia di poli complessi coniugati immaginari puri in $-0.1 \pm i\sqrt{0.39}$. Il polo reale in -0.01δ ha modulo minore di 1 per qualsiasi valore di δ, e dunque non dá problemi di instabilitá, come anche i poli complessi coniugati, che hanno modulo pari a circa 0.6325 e fase circa ± 1.73 rad. Invece il polo in 0.25γ ha modulo minore di 1 per $\gamma \leq 3$, e per tali valori il sistema risulta stabile, ha modulo unitario per $\gamma = 4$, e quindi il sistema risulta marginalmente stabile, mentre ha modulo maggiore di 1 per $\gamma \geq 5$ e per tali valori il sistema risulta instabile. Il modo del sistema corrispondenti al polo reale negativo é $(-0.01\delta)^t$. Quello corrispondente al polo reale positivo é $(0.25\gamma)^t$ I modi corrispondenti ai poli complessi coniugati sono $0.6325^t \sin(1.73t)$ e $0.6325^t \cos(1.73t)$.

D) Non potendovi essere in alcun caso cancellazione poli–zeri, l'eccesso poli–zeri risulta sempre pari a 3, per cui il luogo presenta 3 asintoti. Nel caso di retroazione negativa tali asintoti sono inclinati rispetto al semiasse reale positivo di angoli pari a $\frac{\pi}{3}$, π e $-\frac{\pi}{3}$ radianti rispettivamente; nel caso di retroazione positiva sono inclinati di angoli pari a 0, $\frac{2\pi}{3}$ e $-\frac{2\pi}{3}$. Gli asintoti si intersecano nel punto dell'asse reale di ascissa pari a $(-0.01\delta - 0.2 + 0.25\gamma - 1)/3$. Nelle figure seguenti sono riportati i luoghi richiesti nel caso $\gamma = \delta = 1$.



E) Dal comportamento in prossimità di $t = 0$ si evince che la differenza poli–zeri è pari a 2. Inoltre non vi sono oscillazioni in senso opposto a quello di regime, quindi il sistema più semplice compatibile con questa risposta al gradino è un sistema del secondo ordine senza zeri e con due poli complessi coniugati a parte reale negativa, corrispondente ad una funzione di trasferimento del tipo:

$$G(s) = \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 2j\delta\frac{\omega}{\omega_n}}$$

ove $\delta > 0$. Il valore di K si deduce direttamente dal valore di regime della risposta al gradino, cioè $K = 3$. Il valore di δ é legato alla sovraelongazione relativa, in quanto quest'ultima dipende esclusivamente da esso. Dal grafico si evince che la sovraelongazione percentuale é pari al 43% circa; sul grafico della curva che esprime la sovraelongazione percentuale come funzione del coefficiente di smorzamento per sistemi del secondo ordine si trova che tale valore corrisponde a $\delta = 0.25$. Per determinare la costante ω_n occorre preliminarmente ricavare in maniera approssimativa il valore del modulo della parte immaginaria dei poli, nel seguito indicata con β: tale valore si ricava misurando lo pseudo–periodo T delle oscillazioni della risposta al gradino; infatti si ha $\beta = \frac{2\pi}{T}$. Dalla figura si ottiene $T \simeq 0.65$, da cui $\beta \simeq 9.67$ e $\omega_n = \frac{\beta}{\sqrt{1-\delta^2}} \simeq 10$.

F) Ponendo $z_1 = x$ e $z_2 = \dot{x}$ si ottiene la rappresentazione nello spazio degli stati

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -\frac{1}{\alpha}\cos^2 z_1 - \frac{\beta}{\alpha} z_2^4 + \frac{1}{\alpha} u \end{aligned}$$

G) I punti di equilibrio sono rappresentati da tutte le coppie $z_1 = (2k+1)\frac{\pi}{2\beta}$, $z_2 = 0$ con k intero. Per studiare la stabilitá degli equilibri si puó utilizzare il metodo indiretto di Lyapunov. Le matrici del modello linearizzato sono:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix}$$

In tutti punti di equilibrio la matrice $\mathbf{A}$ ha autovalori 1 e -1, quindi in tali punti l'equilibrio é instabile.

H) L'origine non é fra i punti di equilibrio del sistema; l'ingresso richiesto puó essere scomposto nella somma di sue termini $u = u_1 + u_2$, il primo dei quali serve a rendere l'origine punto di equilibrio, mentre il secondo serve a rendere l'equilibrio globalmente asintoticamente stabile. Ponendo $u_1 = \cos^2 z_1 + \beta z_2^4 + z_1$ si ottiene che l'origine diventa unico punto di equilibrio ed inoltre il sistema risulta lineare. Per rendere l'equilibrio asintoticamente stabile occorre allocarne i poli nel semipiano a parte reale negativa, e ció puó essere fatto tramite un secondo termine dell'ingresso nella forma $u_2 = az_1 + bz_2$, con le costanti a e b scelte in maniera opportuna.