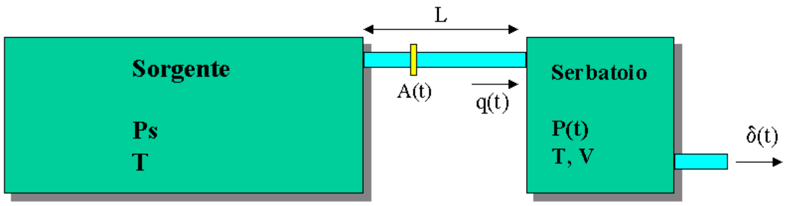
Regolazione e Controllo dei Sistemi Meccanici — 19 Febbraio 2003

Numero di matricola

−	−	$= 10\alpha - 1$	$= 10\beta - 1$	$= \gamma - 1$	$= \epsilon - 1$



• **VO/NO** Si consideri il sistema costituito da due serbatoi a pressione in condizioni isoterme, collegati da un condotto su cui agisce un controllo che regola la luce A di una valvola proporzionale. Il serbatoio a monte ha capacità molto maggiore di quello a valle, e la sua pressione può essere supposta costante e pari a $P_s = (10 + \alpha/5)$ $[MPa]$. Lo scopo del controllo è di regolare la pressione $P(t)$ del serbatoio a valle ad un livello costante $\hat{P} = 0.7P_s$, nonostante un prelievo di portata in massa $\delta(t)$ dovuto al carico dell'utente. Le equazioni del sistema sono le seguenti:

$$\begin{cases} \dot{q}(t) + \frac{8\pi\mu}{\rho A(t)} q(t) - \frac{A(t)}{L}(P_s - P(t)) = 0 \\ \dot{P}(t) = \frac{RT}{V}(q(t) - \delta(t)) \end{cases},$$

dove $q(t)$ é la portata in massa che attraversa il condotto, $L = 1 + \alpha$ $[m]$ é la lunghezza del condotto, $V = 1+\beta$ $[m^3]$ è il volume del serbatoio a valle, e appaiono le costanti $R = 287$ $[J/Kg * K]$, $T = 300$ $[K]$, $\rho = 1.29$ $[Kg/m^3]$ e $\mu = 1.810^{-5}$ $[Pa * sec]$.

A) Trovare il punto di funzionamento (equilibrio) del sistema corrispondente ad un valore costante del prelievo utenza pari a $\delta(t) = \hat{\delta} = 0.1$ $[Kg/s]$.

B) Considerando piccole variazioni rispetto al punto di equilibrio trovato in precedenza, trovare il modello linearizzato del sistema, e determinare il legame tra la variazione della pressione $\tilde{P}(t) = P(t) - \hat{P}$ e le variazioni della sezione del condotto $\tilde{A}(t) = A(t) - \hat{A}$ (ingresso di controllo) e della portata $\tilde{\delta}(t) = \delta(t) - \hat{\delta}$ (ingresso di disturbo).

C) Progettare un sistema di controllo che garantisca per il sistema linearizzato le seguenti specifiche:

C1) Per una variazione a gradino del riferimento di pressione, si chiede errore a regime nullo, tempo di assestamento T inferiore a 40 $[s]$ e sovraelongazione nulla (si supponga la variazione di utenza $\tilde{\delta}(t)$ trascurabile);

C2) Supponendo che il carico dell'utenza possa variare periodicamente con frequenze non superiori a $10^{-3}/(2\pi)$ $[Hz]$ e ampiezze inferiori a 10^{-1} $[Kg/sec]$, la differenza tra la pressione nel serbatoio a valle ed il suo riferimento sia in modulo inferiore a 10^{-1} $[Pa]$ a regime.

C3) Se presente un disturbo $\nu(t)$ nella misura della pressione, con frequenze non inferiori a $20/(2\pi)$ $[Hz]$ e ampiezze inferiori a $0,1MPa$, lo scostamento dalla variazione del riferimento di pressione rimanga inferiore in modulo a 10^{-5} $[MPa]$.

• **VO/NO** Disegnare il diagramma asintotico di Bode della seguente funzione di trasferimento. Indicare una approssimazione della pulsazione di taglio.

$$G(s) = \frac{\alpha + 1}{100} \frac{(s^2 + 100(\alpha + 1)^2)}{(s^3 + 5(\alpha + 1)s^2 + 100(\alpha + 1)^2 s)(s + \frac{\alpha+1}{100})}$$

• **VO** Dato il sistema non lineare:

$$\dot{x} = -x + x^2$$

studiare i punti di equilibrio e le proprietà di stabilità, eventualmente determinare una approssimazione della regione di asintotica stabilità.

Soluzione

A) Portando il sistema in forma di stato

$$\begin{cases} \dot{q} = -\frac{8\pi\mu}{\rho A}q + \frac{A}{L}(P_s - P) \\ \dot{P} = (q-\delta)\frac{RT}{V}, \end{cases}$$

si ottiene l'unico punto di equilibrio $\hat{q} = \hat{\delta}$, $\hat{P} = P_s - \frac{8\pi\mu L}{\rho\hat{A}^2}\hat{\delta}$, da cui immediatamente si ottiene $\hat{A} = \sqrt{\frac{8\pi\mu\hat{\delta}L}{\rho(P_s-\hat{P})}}$.

B) Il linearizzato del sistema attorno all'equilibrio sopra descritto risulta

$$\begin{cases} \dot{\tilde{q}} = -\frac{8\pi\mu}{\rho\hat{A}}\tilde{q} - \frac{\hat{A}}{L}\tilde{P} + [\frac{8\pi\mu}{\rho\hat{A}^2}\hat{q} + (\frac{P_s-\hat{P}}{L})]\tilde{A} \\ \dot{\tilde{P}} = \frac{RT}{V}\tilde{q} - \frac{RT}{V}\tilde{\delta} \end{cases}$$

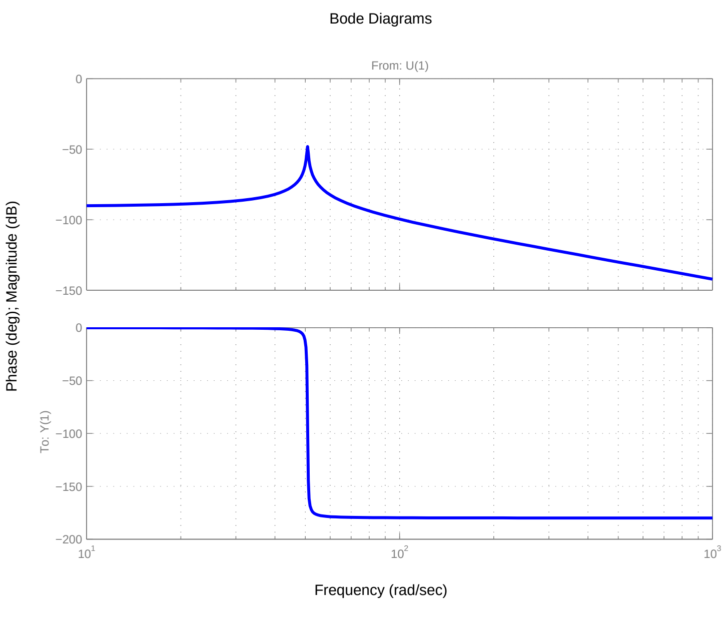
che, mediante semplici passaggi, porta al legame nel dominio della variabile s

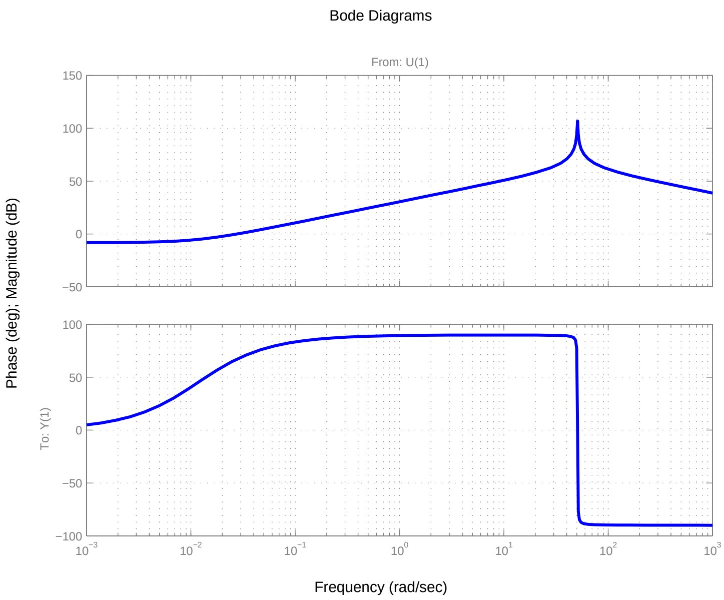
$$\tilde{P}(s) = \frac{\frac{16\pi\mu\hat{\delta}}{\rho\hat{A}^2}}{s^2 + \frac{8\pi\mu}{\rho\hat{A}}s + \frac{RT\hat{A}}{VL}}\tilde{A}(s) - \frac{\frac{RT}{V}(s + \frac{8\pi\mu}{\rho\hat{A}})}{s^2 + \frac{8\pi\mu}{\rho\hat{A}}s + \frac{RT\hat{A}}{VL}}\tilde{\delta}(s).$$

Posti $\alpha = \beta = \gamma = \epsilon = 0$, si ottiene il legame

$$\tilde{P}(s) = \frac{0.078}{s^2 + 0.4s + 2583}\tilde{A}(s) - \frac{86100s + 1006}{s^2 + 0.4s + 2583}\delta(\tilde{s}) = G(s)\tilde{A}(s) - D(s)\delta(\tilde{s})$$

I diagrammi delle funzioni di trasferimento $G(s)$ e $D(s)$ sono riportati rispettivamente nelle seguenti figure



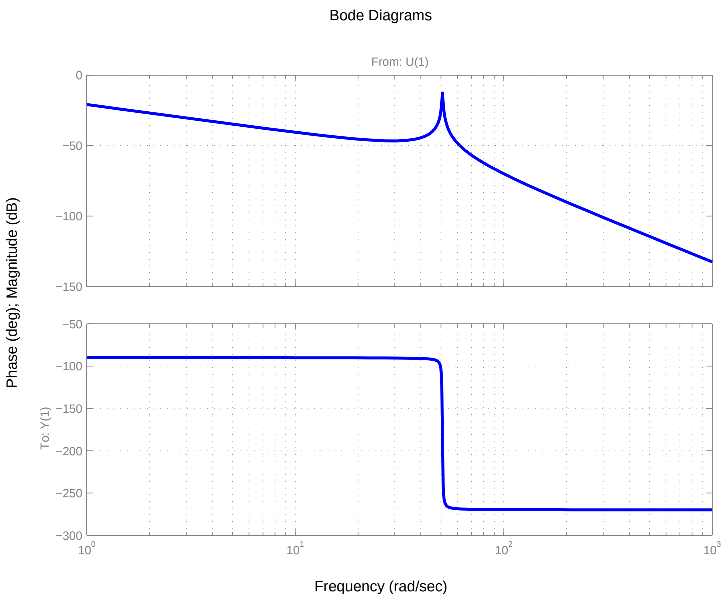


C1) L'impianto $G(s)$ presenta due poli complessi coniugati. Al fine di eliminare l'errore a regime per un riferimento a gradino, si impone un controllore di grado 1.

Per quel che riguarda le specifiche sulla sovraelongazione e sul tempo di assestamento é possibile sfruttare l'approssimazione ad un polo dominante, che porta alla pulsazione di taglio $\omega_T \geq \frac{3}{T} = 0.075 rad/s$. Per questo si puó scegliere un guadagno del controllore pari a 3000. Il controllore finora progettato risulta:

$$C(s) = \frac{3000}{s}$$

Di seguito é riportato il diagramma di Bode del sistema compensato



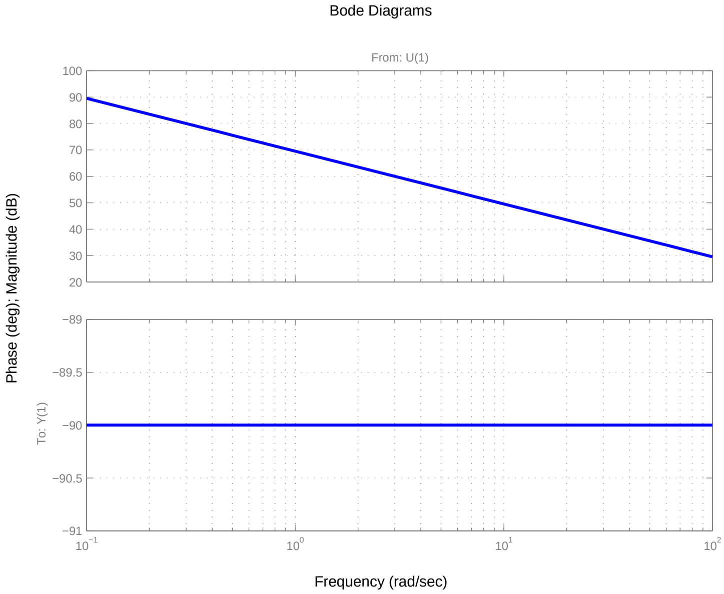
C2) Il teorema della risposta armonica impone la diseguaglianza per pulsazioni inferiori a $10^{-3}[rad/s]$:

$$\frac{|D10^{-1}|}{|1+CG|}_{db} \leq -20db$$

che, supposto il valore del modulo di CG molto maggiore di uno, porta alla diseguaglianza

$$|D|_{db} - 20 - |C|_{db} - |G|_{db} \leq -20.$$

Il valore di $|D|$ per quelle frequenze risulta circa $-8db$, il valore di $|G|$ risulta circa $-90db$. Tutto questo porta ad una valore del guadagno del controllore $|C| \geq 82db$. Tale condizione é abbondantemente garantita (si veda la figura seguente).



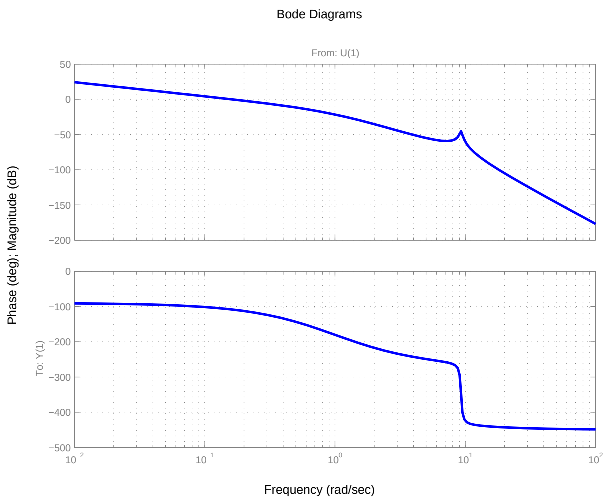
C3) Per il teorema della risposta armonica applicato alla funzione di trasferimento che lega la variazione di pressione al rumore di misura, si ottiene la disequazione

$$|CG|_{db} \leq -80,$$

che, come si nota dal diagramma di Bode del sistema finora compensato, non é soddisfatta. A tal proposito si possono piazzare due ulteriori poli reali coincidenti nel controllore a frequenza $\omega = 1[rad/s]$. Il controllore che soddisfa tutte le specifiche richieste risulta quindi

$$C(s) = \frac{3000}{s(s+1)^2}.$$

La figura seguente riporta i diagrammi di Bode di ampiezza e fase del sistema compensato



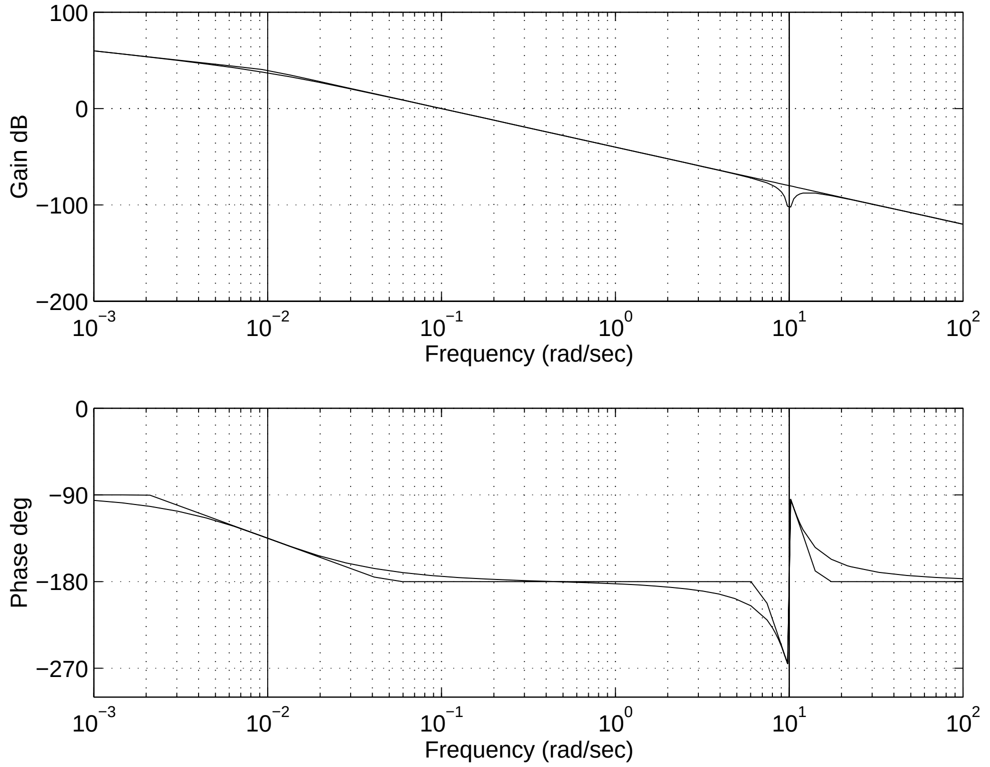


Figure 1: La figura si riferisce al caso $\alpha = 0$

- La funzione di trasferimento in forma di Bode risulta:

$$G(s) = \frac{(\frac{s^2}{100(\alpha+1)^2} + 1)}{s(\frac{s^2}{100(\alpha+1)^2} + \frac{s}{20(\alpha+1)} + 1)(\frac{100s}{\alpha+1} + 1)}$$

Il sistema ha una costante di guadagno positiva pari a uno, un polo nell'origine, un polo a parte reale negativa in $\frac{\alpha+1}{100}$, una coppia di zeri complessi coniugati con pulsazione naturale $10(\alpha+1)$ e costante di smorzamento nulla, una coppia di poli complessi coniugati con pulsazione naturale $10(\alpha+1)$ e costante di smorzamento $1/4$. I contributi in ampiezza delle coppie di zeri e poli complessi e coniugati si annullano a vicenda lontano dalla pulsazione naturale.

La pendenza del diagramma delle ampiezze cambia da $-20db/dec$ a $-40db/dec$ per valore della pulsazione pari a $\frac{\alpha+1}{100}$ il cui valore dell'ampiezza corrispondente risulta $-20 \ \mathsf{Log} \frac{\alpha+1}{100}$, pertanto un'approssimazione della pulsazione di taglio é data da $w_n = \frac{\sqrt{\alpha+1}}{10}$.

- **(VO)** Gli equilibri del sistema sono le soluzioni dell'equazione $-x + x^2 = 0$ e quindi $x = 0$, $x = 1$. Il linearizzato risulta $A(x) = -1 + 2x$ da cui $A(1) = 1$ e quindi l'equilibrio $x = 1$ è instabile, e $A(0) = -1$ e quindi l'equilibrio $x = 0$ è asintoticamente stabile.

Si consideri $V(x) = x^T P x$ dove P è soluzione dell'equazione di Lyapunov $A^T P + PA = -Q$ con Q definita positiva.

Si ha $\dot{V} = 2x^T P(-x + x^2) = 2V(x-1)$, che è definita negativa sull'intervallo $]-\infty, 1]$. Tale intervallo è la regione di asintotica stabilità: si noti infatti che il punto $x = 1$ è un punto di equilibrio instabile, quindi non può che essere esterno alla regione stessa.