

Numero di matricola

-	-	$= 100\alpha - 1$	$= 100\beta - 1$	$= 10\gamma - 1$	-
---	---	-------------------	------------------	------------------	---

Si consideri il modello dinamico del sistema di sospensione a levitazione magnetica riportato in fig.1. Il sistema è composto da una sorgente di campo magnetico (schematizzata in figura dalla induttanza  $L$ ) e da una massa  $m$  di materiale ferromagnetico. La massa è sottoposta sia alla forza peso, sia alla forza di attrazione magnetica. La posizione  $h$  della massa è misurata mediante opportuni sensori. Il modello

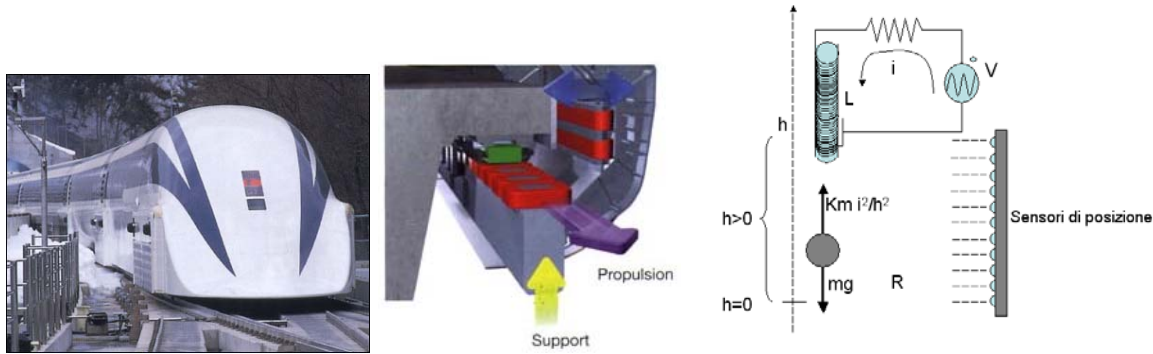


Figure 1: Sistema per la levitazione magnetica e modello relativo.

semplificato del sistema, valido per  $h > 0$ , è descritto dalla seguente dinamica

$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} + Ri & = v(t) \\ m \frac{d^2h}{dt^2} + b \frac{dh}{dt} + K_m \frac{i^2}{h^2} & = mg \end{cases} \quad (1)$$

dove  $m = 20 \cdot 10^{-2} [kg]$ ,  $L = 0.5 + \alpha [H]$ ,  $R = 50 + \beta [\Omega]$  rappresenta la resistenza del circuito di eccitazione,  $K_m = 19.62 + \gamma [N(m/A)^2]$  è il coefficiente di accoppiamento magnetico,  $b = 0.1 [Ns/m]$  il coefficiente di attrito viscoso e  $v(t)$  la tensione di controllo del sistema.

Il modello linearizzato con la scelta delle variabili di stato  $[x_1, x_2, x_3]^T = [h, \dot{h}, i]^T$ , ingresso nominale  $\bar{V} = 5 [V]$ , nel punto di equilibrio di coordinate rispettivamente,  $\bar{x}_1 = \frac{\bar{V}}{R} \sqrt{\frac{K_m}{mg}}$ ,  $\bar{x}_2 = 0$ ,  $\bar{x}_3 = \frac{\bar{V}}{R}$ , è il seguente:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = x_2 \\ \dot{x}_2 & = 2 \frac{g}{\bar{x}_1} x_1 - \frac{b}{m} x_2 - 2 \frac{g}{\bar{x}_3} x_3 \\ \dot{x}_3 & = -\frac{R}{L} x_3 + \frac{1}{L} v \end{cases}$$

**A (VO)** Si studino le proprietà di osservabilità e raggiungibilità del modello linearizzato considerando come ingresso la tensione  $V(t)$  e come uscita prima la posizione  $h(t)$  della massa e poi la corrente di armatura  $i(t)$ . Si dia infine una interpretazione fisica ai risultati ottenuti.

**C (NO/VO)** Si progetti un controllore che utilizzando la misura dell'uscita  $h(t)$ , regoli la tensione di ingresso  $V(t)$  in modo da stabilizzare il sistema. Si riporti lo schema a blocchi del sistema di controllo realizzato.

**D (NO/VO)** Sfruttando il risultato ricavato al punto precedente progettare un controllore che:

- 1) garantisca l'inseguimento di un riferimento di posizione costante  $h$  con errore nullo anche in presenza di un disturbo costante sulla tensione di ingresso;
- 2) permetta al sistema di raggiungere il riferimento di posizione mantenendo la sovraelongazione inferiore al 37% con un tempo di assestamento inferiore a  $30 \cdot 10^{-3} sec$ ;
- 3) qualora la lettura di posizione sia inficiata da un disturbo a frequenze maggiori di  $1.5 KHz$ , consenta al sistema di attenuare di un fattore  $10^{-5}$  tale rumore;
- 4) [OPZIONALE] attenui di  $\frac{1}{1000}$  un'uscita il contributo di un disturbo sinusoidale sulla tensione di ingresso, la cui ampiezza non supera i  $600mV$ , per frequenze minori di  $50Hz$ .

**E (NO/VO)** Si ipotizzi di poter agire, mediante retroazione della velocità  $\frac{dh(t)}{dt}$ , sull'ingresso  $V(t)$  con azione puramente proporzionale di costante  $K$ . Si dica se è possibile stabilizzare il sistema utilizzando il teorema di Nyquist.

## Soluzione

A) E' possibile esprimere il sistema linearizzato, peraltro già in forma di stato, in termini matriciali, nel punto di equilibrio indicato nella traccia. Considerando i parametri  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  nulli, si ottiene:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2\frac{g}{x_1} & -\frac{b}{m} & -2\frac{g}{x_3} \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 62.04 & -0.5 & -196.20 \\ 0 & 0 & -10^2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

A questo punto il calcolo delle  $G_k(s)$   $k = 1, 2$  richieste può essere fatto esplicitando le matrici  $A$ ,  $B$  e  $C$  della forma di stato (la matrice  $D$  è nulla):

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \Rightarrow G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

Considerando come uscita la posizione  $y_1 = h = x_1$  si ottiene  $\mathbf{C}_h = [1 \ 0 \ 0]$ , da cui la funzione di trasferimento è valutabile numericamente, ad esempio con il comando Matlab `g1=tf(SS(A,B,C_h,D))`. Si ottiene

$$\mathbf{G}_1(s) = \frac{Y_1(s)}{V(s)} = \frac{-392.4}{s^3 + 100.5s^2 - 12.04s - 6204}$$

La funzione di trasferimento  $G_1(s)$  risulta instabile ad anello aperto dal momento che si rileva una variazione di segno dei coefficienti del denominatore, deducendone l'instabilità del punto di equilibrio considerato. I poli del sistema sono (utilizzando il comando Matlab):

```
>> poli =roots([1 100.5 -12.04 -6204])
ans =
-100.0000
-8.1305
7.6305
```

Con gli stessi parametri, ma uscita  $y_2 = i = x_3$  con  $\mathbf{C}_i = [0 \ 0 \ 1]$ , si ottiene invece

$$\mathbf{G}_2(s) = \frac{Y_2(s)}{V(s)} = \frac{2}{s + 100}.$$

In questo caso, la f.d.t. ha un solo polo stabile. Si osservi che in questo caso sono state effettuate due cancellazioni polo-zero.

La funzione di trasferimento poteva essere valutata alternativamente L-trasformando il sistema linearizzato, ottenendo un sistema in cui è possibile esplicitare con alcuni passaggi algebrici la relazione fra ingresso e uscita considerata:

$$\begin{aligned} sX_1(s) &= X_2(s) \\ sX_2(s) &= \frac{2gR}{V} \sqrt{\frac{gm}{K_m}} X_1(s) - \frac{b}{m} X_2(s) - \frac{2gR}{V} X_3(s) \\ sX_3(s) &= -\frac{R}{L} X_3(s) + \frac{V(s)}{L} \end{aligned}$$

Dalla terza equazione si ottiene  $X_3(s) = \frac{1}{s + \frac{R}{L}} V(s)$ , da cui si ricava direttamente

$$G_2(s) = \frac{X_3(s)}{V(s)} = \frac{1}{s + \frac{R}{L}}.$$

Sostituendo poi la prima e la terza equazione nella seconda ottengo tutto in funzione di  $X_1(s)$ .

$$s^2 X_1(s) = -\frac{b}{m} s X_1(s) - 2g \frac{R}{V} \frac{1}{s + \frac{R}{L}} V(s) + 2g \frac{R}{V} \sqrt{\frac{gm}{K_m}} X_1(s), \text{ da cui infine}$$

$$G_1(s) = \frac{X_1(s)}{V(s)} = \frac{-2g \frac{R}{V} \frac{1}{L}}{(s^2 + \frac{b}{m} s - 2g \frac{R}{V} \sqrt{\frac{gm}{K_m}})(s + \frac{R}{L})}$$

Inserendo i valori numerici dati si ottengono ovviamente gli stessi risultati.

B) La matrice di raggiungibilità  $R = [B|AB|A^2B]$  del sistema risulta

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2\frac{gL}{x_3} \\ 0 & -2\frac{gL}{x_3} & \# \\ \frac{1}{L} & \# & \# \end{bmatrix}$$

dove il simbolo ‡ identifica termini non influenti ai fini della trattazione. La matrice di raggiungibilità ha chiaramente rango pieno, pertanto il sistema ottenuto è completamente raggiungibile. Ciò significa che, variando in modo opportuno la tensione di controllo  $V$ , la massa può raggiungere posizioni e velocità arbitrarie; anche la corrente nella induttanza può essere assegnata a piacimento. Si osservi peraltro che il poter raggiungere in un qualsiasi tempo  $t$  un valore assegnato dello stato  $x$ , non implica che sia possibile seguire una particolare traiettoria  $x(t)$  dello stato nel tempo, come è evidente ad esempio per qualsiasi traiettoria con massa ferma al di fuori della condizione di riposo e corrente nulla.

Per quel che riguarda la proprietà di osservabilità, nel caso in cui l'uscita sia  $y = h = x_1$  si ottiene  $\mathbf{C}_h = [1\ 0\ 0]$ , da cui la matrice di osservabilità  $\mathbf{O}_h = [\mathbf{C}_h | \mathbf{C}_h \mathbf{A} | \mathbf{C}_h \mathbf{A}^2]^T$

$$\mathbf{O}_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2\frac{g}{x_1} & -\frac{b}{m} & -2\frac{g}{x_3} \end{bmatrix}$$

che ha rango pieno. Pertanto il sistema così ottenuto è completamente osservabile. Ciò significa che misurando la posizione della massa  $h$  e conoscendo l'ingresso  $V$  al sistema, è possibile stimare sia la velocità della massa che la corrente  $i$  che scorre nel circuito magnetico. Ciò concorda con la intuizione fisica, per la quale la conoscenza della funzione  $h(t)$  determina quella della velocità e della accelerazione della massa, quindi anche dell'andamento delle forze che agiscono su di essa, ed in ultima analisi della corrente che tali forze genera.

Nel caso in cui la misura disponibile sia invece la corrente  $y = i = x_3$ , la matrice delle uscite risulta  $\mathbf{C}_i = [0\ 0\ 1]$ . La matrice di osservabilità del sistema  $\mathbf{O}_i = [\mathbf{C}_i | \mathbf{C}_i \mathbf{A} | \mathbf{C}_i \mathbf{A}^2]$  è ora

$$\mathbf{O}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \\ 0 & 0 & \frac{R^2}{L^2} \end{bmatrix},$$

che ha rango uguale a 1. Ciò indica che, conoscendo esclusivamente la corrente di armatura  $i$ , non è possibile stimare nè la posizione  $h$ , nè la velocità  $\dot{h}$  della pallina: questo concorda con la intuizione fisica, in quanto il moto della massa evolve diversamente, a parità della forza ad essa applicata (quindi a pari andamento della  $i(t)$ ) a seconda della posizione e velocità iniziali.

Si osserva che la presenza in questo secondo caso di un sottospazio inosservabile di dimensione due corrisponde alla cancellazione dei due poli osservata precedentemente per la f.d.t.  $\mathbf{G}_2$ .

- C) Il sistema considerato è instabile in anello aperto, quindi il progetto del suo controllore non può essere fatto direttamente con metodi basati sui diagrammi di Bode.

Il progetto può essere fatto ad esempio ricorrendo alla tecnica del doppio anello di retroazione in cascata (vedi figura 2). L'anello interno ha lo scopo di rendere il sistema stabile, e si può progettare ad esempio mediante il metodo del luogo delle radici. Una volta reso il sistema retroazionato asintoticamente stabile, l'anello esterno viene progettato per soddisfare le specifiche richieste, basandosi sui diagrammi di Bode.

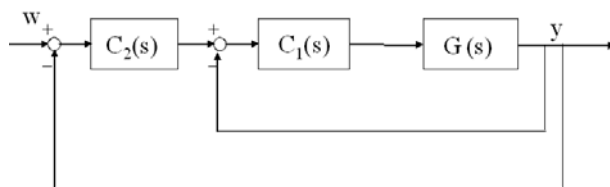


Figure 2: Schema a blocchi del progetto del controllore

Si noti che nel luogo delle radici del sistema non controllato (riportato a sinistra in figura 3) è presente un asintoto reale positivo. Per ovviare a questo problema è opportuno considerare una retroazione positiva (che equivale sostanzialmente a porre negativo il guadagno del controllore), ottenendo il luogo riportato a destra in figura 3.

Per garantire la stabilizzazione del sistema si utilizza un controllore del tipo:  $C(s) = -|K| \frac{1+\tau_1 s}{1+\tau_2 s}$  che presenta un polo e uno zero reali e un guadagno negativo. Lo zero reale può essere posizionato

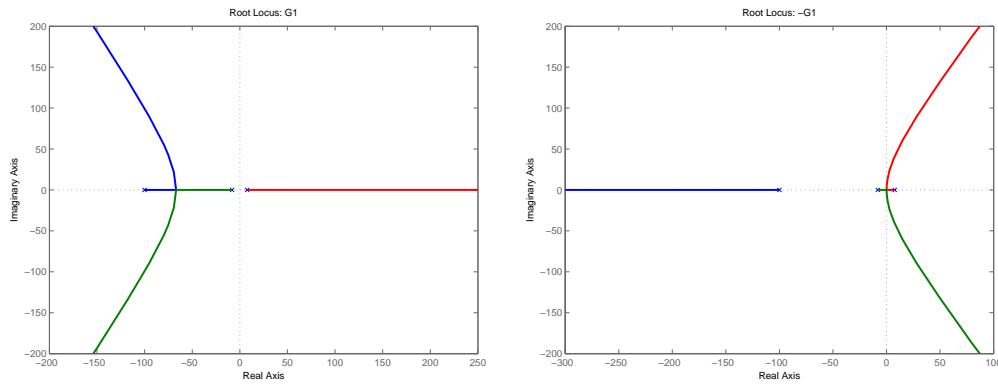


Figure 3: Luogo delle radici della  $G(s)$  con retroazione negativa e positiva.

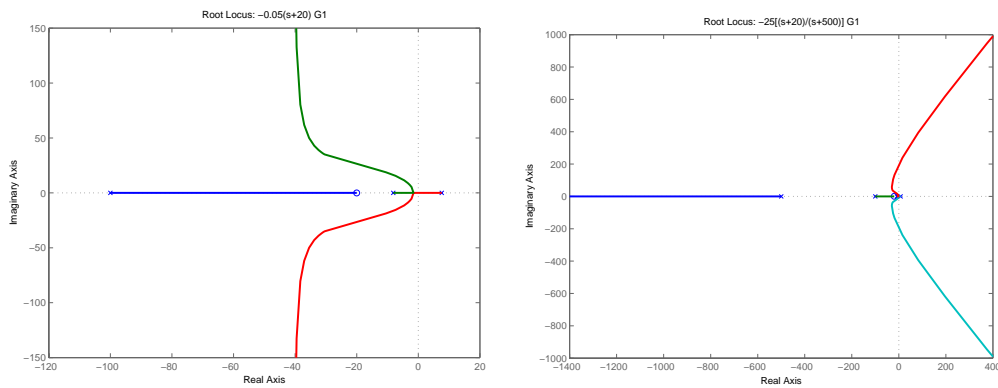


Figure 4: Luogo delle radici dopo l'aggiunta dello zero reale (sinistra) e del polo reale (destra)

vicino al polo reale stabile dell'impianto con modulo minore, ottenendo il nuovo luogo riportato a sinistra in figura 4. Per la causalità del controllore, è necessario introdurre almeno un polo reale, che può essere posto lontano dallo zero. A destra in figura 4 è riportato il risultato dopo aver posto il polo reale negativo ad almeno una decade dopo lo zero (nell' esempio zero=-20; polo=-500). Per ottenere la stabilità, è altresì necessario aumentare il guadagno. Usando gli strumenti di calcolo (*rlocfind* o *sisotool* in *Matlab*) o il criterio di Routh-Hurwitz, è possibile stimare il guadagno minimo che, con i valori numerici considerati, è circa 16: un valore compatibile risulta  $k = 20$ . Il luogo delle radici ottenuto complessivamente con il controllore  $C_1(s) = -20 \frac{1+0.05s}{1+0.002s}$  è rappresentato in figura 5. La funzione di trasferimento in anello chiuso risulta:

$$G(s) = 10^6 \frac{0.1962(s+20)}{(s+500.9)(s+95.95)(s^2+3.615s+17.1)}$$

i cui diagrammi di Bode sono riportati in figura 6. Si noti che il sistema è solo *condizionalmente* stabile, cioè è stabile in un intervallo di guadagno  $k$  sufficientemente alto (maggiore di 16 appunto) e non superiore a  $2.33 \cdot 10^3$ , valore per cui il sistema ritorna nuovamente instabile.

**D** Considerando lo schema a blocchi del sistema complessivo compresa la stabilizzazione per cui  $G = \frac{C_1 G_1}{1+C_1 G_1}$ , (vedi figura 7) inizialmente con  $\delta_2$  nullo, valgono le seguenti relazioni:

$$Y = \frac{G_1}{1+C_1 G_1} \delta_1 + G V_2$$

Essendo  $V_2 = C_2[R - Y]$  si ottiene

$$Y[1+C_2 G] = \frac{G_1}{1+C_1 G_1} \delta_1 + C_2 G R$$

Infine sostituendo l'espressione di  $G$  e considerando il contributo di  $\delta_2$  si ha:

$$Y = \frac{G_1 C_1 C_2}{1+G_1 C_1 + G_1 C_1 C_2} R + \frac{G_1}{1+G_1 C_1 + G_1 C_1 C_2} \delta_1 - \frac{C_2 G}{1+C_2 G} \delta_2.$$

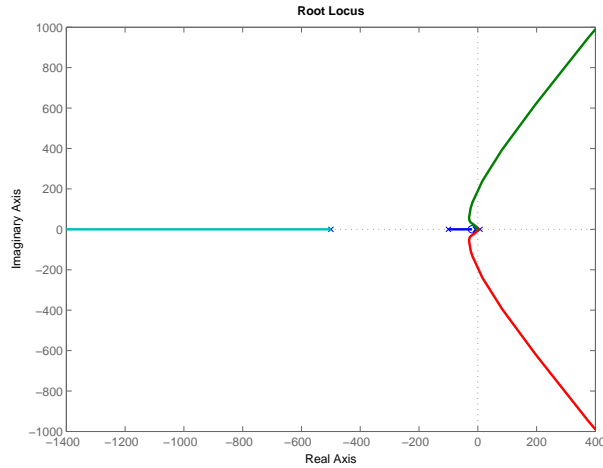


Figure 5: Luogo delle radici del sistema una volta inserito il controllore  $C_1(s)$ .

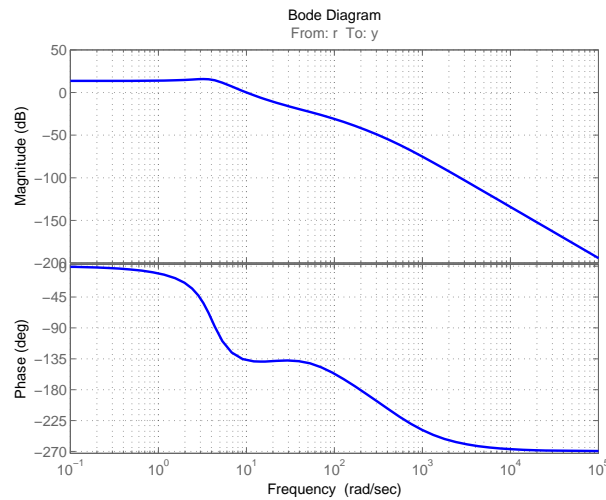


Figure 6: Diagrammi di Bode della funzione di trasferimento con l'anello interno chiuso.

dove  $\delta_1(t)$  rappresenta il disturbo sulla tensione di ingresso mentre  $\delta_2(t)$  è il rumore di misura. Facendo riferimento al progetto di un controllore del tipo

$$C_2(s) = \frac{K}{s^t} \hat{C}(s), \quad \text{con} \quad \hat{C}(0) = 1$$

iniziamo considerando la scelta del *tipo*  $t$  e della costante di guadagno  $K$  del controllore basandoci sulle specifiche statiche. Per verificare la prima specifica è necessario introdurre un polo nell'origine a monte del disturbo  $\delta_1$ , necessariamente nel controllore  $C_2$ . In tal modo viene annullato sia l'errore a regime sia l'effetto del disturbo costante  $\delta_1$ .

La specifica sulla sovralongazione è soddisfatta se si richiede che il sistema in anello chiuso sia approssimabile con un sistema del secondo ordine con smorzamento dei poli dominanti dell'ordine di 0.302 (come si ricava dalla espressione della sovralongazione dei sistemi di secondo ordine  $s = e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$ ). Sul piano di Bode, questo significa che si ammette un margine di fase  $\phi_M \approx 30^\circ$ . La specifica sul tempo di assestamento, per il caso di sistema in anello chiuso a due poli dominanti stabilito sulla base della precedente specifica, indica che la pulsazione naturale dei due poli deve essere  $\omega_N \geq 3/\delta T_a \approx 350 \text{ rad/sec}$ . Questa specifica si riflette nel chiedere che il diagramma delle ampiezze di  $C_2(j\omega)G(j\omega)$  intersechi l'asse a 0db a pulsazioni superiori a  $350 \text{ rad/sec}$ .

Per soddisfare queste specifiche, è possibile operare innanzitutto aumentando il guadagno del controllore ( $K=4200$ ) e successivamente piazzando almeno due zeri alla pulsazione  $\omega = 60 \text{ rad/sec}$  in modo da introdurre un'azione anticipatrice, ottenendo i diagrammi di Bode in fig.8 (a sinistra).

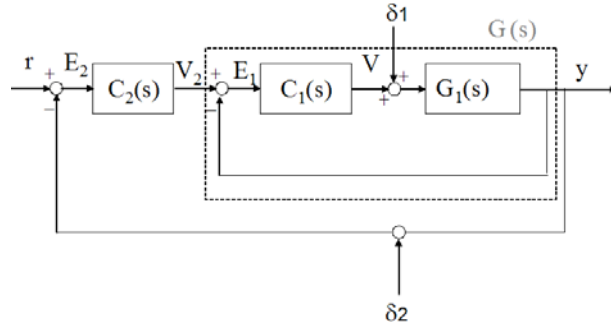


Figure 7: Schema a blocchi complessivo del progetto del controllore

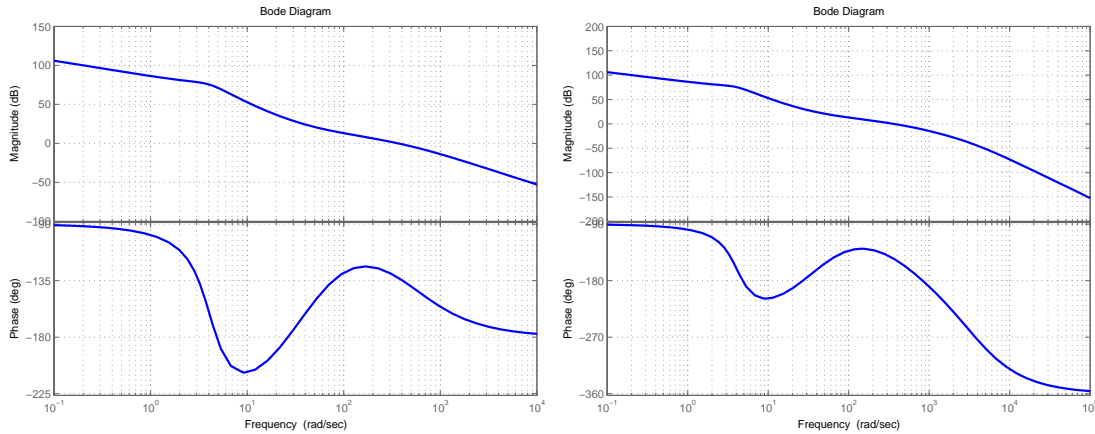


Figure 8: Diagrammi di Bode per le fasi successive del progetto

A questo punto rimane da imporre la specifica di reiezione dei disturbi in alta frequenza  $|C_2G|_{db} \leq -100db$  per pulsazioni  $\omega \geq 9248 \approx 10^4 rad/sec$ . Si garantisce questa specifica inserendo nel compensatore almeno un polo, cosa che è peraltro necessaria per la causalità del controllore. Ponendo un polo in  $-3.3 \cdot 10^3$ , si ottiene il diagramma di Bode in fig.8 (a destra). Per aumentare la reiezione secondo la specifica richiesta si può posizionare un ulteriore polo, ad esempio nuovamente in  $-3.3 \cdot 10^3$ . Così facendo si ottengono un margine di fase di  $34.9^\circ$  e una pulsazione di taglio di  $363 rad/sec$

Il controllore finale ottenuto risulta:

$$C_2(s) = 4200 \frac{(1 + \frac{s}{60})^2}{s(1 + \frac{s}{3.3 \cdot 10^3})^2}$$

Per l'ultima specifica, basta considerare la funzione di trasferimento tra il disturbo  $\delta_1$  e l'uscita  $Y(s)$ :

$$Y_{\Delta_1}(s) = \frac{G_1}{1 + C_1G_1 + C_1C_2G_1} \Delta_1.$$

essendo l'ampiezza del disturbo contenuta nella banda di interesse (al massimo  $600mV$  per pulsazioni minori di  $314.15 rad/sec$ ), possiamo valutare, utilizzando il teorema della risposta armonica, il contributo a regime della sinusoide nel caso peggiore di ampiezza. A regime, nell'ipotesi di sistema già stabilizzato:

$$|y_{\delta_1}(t \gg 1)| \leq \left| \frac{G_1(j\omega)}{1 + C_1(j\omega)G_1(j\omega) + C_1(j\omega)C_2(j\omega)G_1(j\omega)} \right|_{\omega \leq 314.15 rad/sec} \cdot 0.6.$$

Deve sussistere la seguente relazione:  $\left| \frac{G_1(j\omega)}{1 + C_1(j\omega)G_1(j\omega) + C_1(j\omega)C_2(j\omega)G_1(j\omega)} \right|_{\omega \leq 314.15 rad/sec}$  al di sotto di  $\frac{1/1000}{600 \cdot 10^{-3}} = 0.0017$ . Nell'ipotesi che nella banda di interesse il contributo del termine  $C_1G_1 + C_2C_1G_1$

sia superiore a 40db, si ottiene:

$$\left| \frac{G_1}{1 + G_1 C_1 + C_2 C_1 G_1} \right| \approx \left| \frac{G_1}{C_2 C_1 G_1} \right| = \frac{1}{|C_2 C_1|}.$$

In tal caso basta che  $|C_2(j\omega)C_1(j\omega)|_{\omega \leq 314.15 \text{ rad/sec}} \geq 600$ , ossia  $|C_2|_{db} + |C_1|_{db} > 55.56 \text{ db}$ . Dall'andamento del diagramma di Bode delle ampiezze di  $C_1(s)$  il caso peggiore che è alle basse frequenze (26db). Per quanto riguarda il diagramma di Bode dell'ampiezza di  $C_2$  il caso nella banda di interesse, è

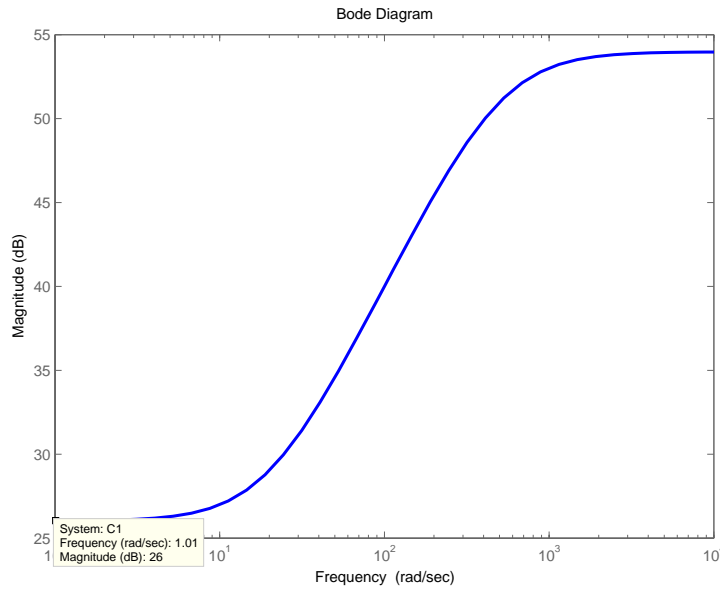


Figure 9: Diagrammi relativi al controllore  $C_1(s)$ .

alla pulsazione di 60rad/sec con 43db (vedi figura 11).

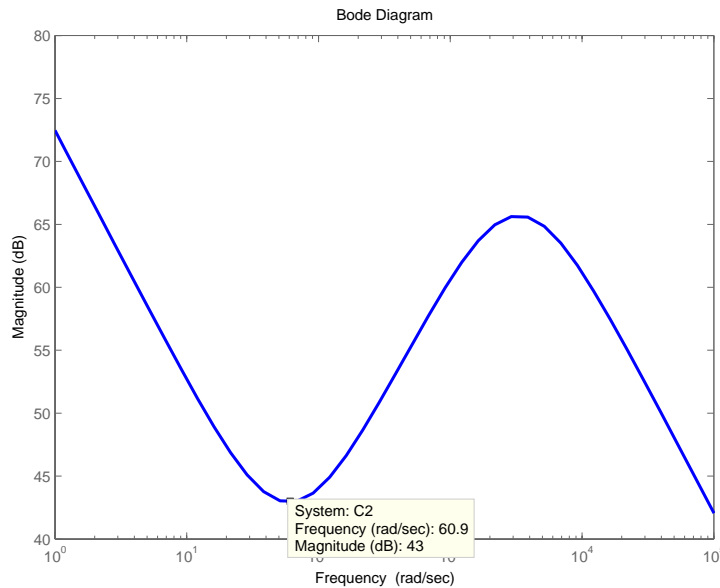


Figure 10: Diagrammi relativi al controllore  $C_1(s)$ .

La condizione finale, considerando il controllore precedentemente elaborato, risulta evidentemente già verificata. A titolo di verifica viene riportata l'andamento della risposta al gradino del sistema complessivo ad anello chiuso. (vedi figura ??).

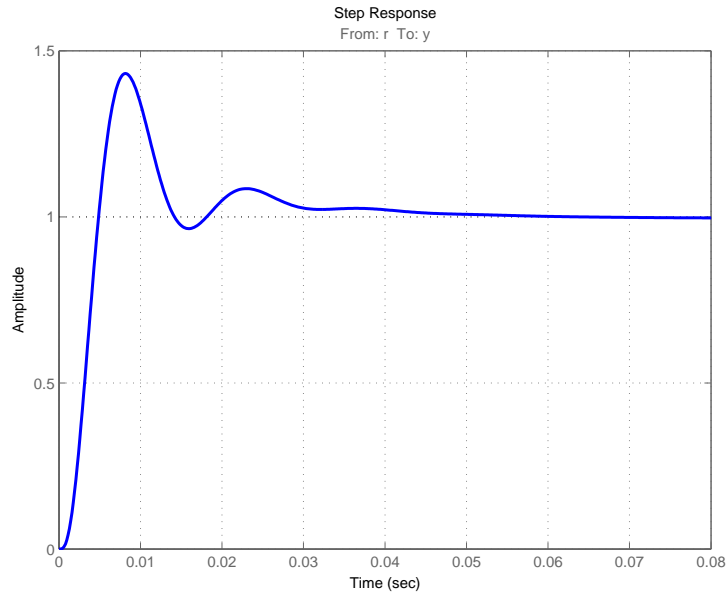


Figure 11: Andamento della risposta al gradino.

**E** La funzione di trasferimento  $G_3(s)$  tra velocità  $\dot{h}(t)$  e ingresso  $v(t)$  è valutabile, nel dominio di Laplace, premoltiplicando per  $s$  la funzione ad anello aperto  $G_1(s)$ , ossia  $G_3(s) = sG_1(s)$ . Tracciandone i diagrammi di Nyquist è facile constatare che la stabilizzazione del sistema di sospensione a levitazione magnetica, usando la misura della sua velocità, non può essere fatta, con una semplice retroazione statica. Infatti per il teorema di Nyquist, avendosi un polo instabile in anello aperto, sarebbe necessario che il luogo circondasse una volta in senso antiorario il punto  $-1$ . Ciò è chiaramente impossibile per qualsiasi valore di  $K$ , come si osserva dai diagrammi di Nyquist riportati sotto (per retroazione positiva e negativa, rispettivamente).

