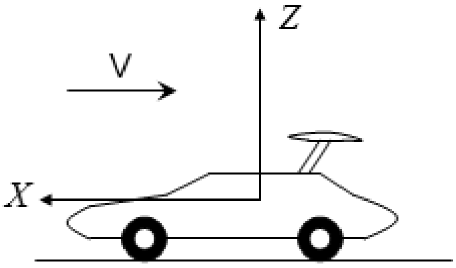
Esercitazione Scritta di Controlli Automatici — 08-01-2004

Si consideri il modello dinamico di un'autovettura dotata di sospensioni e di un alettone (come rappresentato in figura):



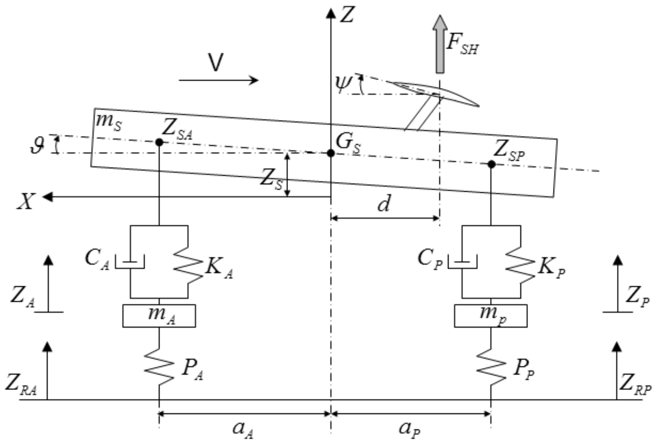


Figure 1: Autovettura dotata di sospensioni e di un alettone (sinistra) e relativo modello piano di tipo "half car" rappresentante una sezione del veicolo (destra)

$$
\begin{aligned}
m_S\ddot{Z}_S &= F_A + F_P + F_{SH} - g\,m_S,\\
I_y\ddot{\theta} &= F_A\,a_A - F_P\,a_P - F_{SH}\,d,\\
m_A\ddot{Z}_A &= -P_A(Z_A - Z_{RA}) + F_A - g\,m_A,\\
m_P\ddot{Z}_P &= -P_P(Z_P - Z_{RP}) + F_P - g\,m_P,
\end{aligned}
$$

con

$$
\begin{aligned}
&F_A = K_A(Z_S + a_A\theta - Z_A) + C_A(\dot{Z}_S + a_A\dot{\theta} - \dot{Z}_A),\\
&F_P = K_P(Z_S - a_P\theta - Z_P) + C_P(\dot{Z}_S - a_P\dot{\theta} - \dot{Z}_P),\\
&F_{SH} = V\,C_{att}\,\tfrac{1}{2}(\sin(2\psi) + 2\theta\cos(2\psi)),
\end{aligned}
$$

dove Z_S è l'altezza del baricentro del veicolo rispetto al riferimento $< XZ >$, θ è l'angolo di beccheggio, Z_A e Z_P sono rispettivamente l'altezza del baricentro della sospensione ateriore e posteriore. Inoltre, $m_S = 500\,[kg]$ è la massa del corpo della vettura, $m_A = 40\,[kg]$ ed $m_P = 50\,[kg]$ sono rispettivamente la massa della sospensione anteriore e posteriore; $K_A = 4000\,\left[\frac{N}{m}\right]$ e $K_P = 5000\,\left[\frac{N}{m}\right]$ le loro costanti elastiche, $C_A = 175\,\left[\frac{Ns}{m}\right]$ e $C_P = 200\,\left[\frac{Ns}{m}\right]$ i rispettivi coefficienti di attrito dinamico. La costante elastica dei pneumatici è $P_A = 12064\,\left[\frac{N}{m}\right]$ per l'anteriore e $P_P = 9000\,\left[\frac{N}{m}\right]$ per il posteriore. Il passo anteriore del veicolo rispetto al baricentro G_S è $a_A = 2.5\,[m]$, $a_P = 2\,[m]$ per il posteriore, $I_y = 200\,[kg\,m^2]$ è il momento di inerzia del veicolo rispetto all'asse Y (perpendicolare al piano di sezione), g è l'accelerazione di gravità ($g = 9.8\,\left[\frac{m}{s^2}\right]$), $Z_{RA} = 70\,[cm]$ e $Z_{RP} = 80\,[cm]$ sono la distanza del piano stradale sull'anteriore e sul posteriore rispetto al riferimento scelto (veicolo in marcia su leggera salita), considerate costanti.

La sospensione attiva di tipo "skyhook" agisce direttamente sull'inclinazione dell'alettone, grazie alla quale il vento incidente sull'alettone del veicolo (distante $d = 1\,[m]$ dal baricentro G_S), genera una forza F_{SH} perpendicolare all'alettone stesso, dove $V = 15\,\left[\frac{m}{s}\right]$ è la velocità costante del vento e $C_{att} = 50\,\left[\frac{Ns}{m}\right]$ la portanza dell'alettone.

A Supponendo di controllare la posizione dell'alettone con un ingresso di posizione $u = \psi$ si linearizzi il sistema attorno ai valori di equilibrio $x_{eq} = (Z_S, \theta, Z_A, Z_P, \dot{Z}_S, \dot{\theta}, \dot{Z}_A, \dot{Z}_P) = (-0.0075, 0, -0.5519, -0.5519, 0, 0, 0, 0)$ e $u = 0$.

B Si studi la controllabilità del modello linearizzato considerando come ingresso l'angolo ψ, e l'osservabilità del modello linearizzato considerando alternativamente come uscita la posizione Z_S e l'angolo θ.

C Si progetti un regolatore che, usando la misura del valore di uscita θ, regoli l'angolo ψ in modo da garantire l'asintotica stabilità del punto di equilibrio.

D Si proceda come sopra, in modo da garantire l'ulteriore specifica che il sistema regolato insegua riferimenti a gradino con errore a regime nullo.

E Supponendo che i controlli siano limitati in modulo da $\pi/20$ e che il controllore sia implementato su un sistema digitale con un tempo di campionamento pari a 0.1 secondi, si descriva ed implementi una procedura che calcoli una sequenza di controlli tale da far variare l'angolo di beccheggio da 0 a $\pi/10$ in non più di $3sec$.

F Supponendo che durante una campagna di esperimenti siano disponibili le letture sugli angoli di beccheggio θ ottenute ogni 0.5 secondi, determinare ed implementare una procedura che permetta di ricostruire completamente lo stato iniziale del sistema e specificare il tempo minimo di attesa (numero di campioni) necessario. Discutere poi il caso in cui le misure siano note a meno di un certo errore.

Soluzione

A Sostituendo i valori numerici e scegliendo come variabili di stato $(Z_S, \theta, Z_A, Z_P, \dot{Z}_S, \dot{\theta}, \dot{Z}_A, \dot{Z}_P)$, si ottiene

$$\begin{aligned}
F_A &= 4000x_1 + 10000x_2 - 4000x_3 + 175x_5 + 437.5x_6 - 175x_7,\\
F_P &= 5000x_1 - 10000x_2 - 5000x_4 + 200x_5 - 400x_6 - 200x_8,\\
F_{SH} &= 375\sin(2u) + 750x_2\cos(2u),\\
Z_{SA} &= x_1 + 2.5x_2,\\
Z_{SP} &= x_1 - 2x_2,
\end{aligned}$$

il sistema in forma di stato risulta

$$\begin{array}{rcl}
\dot{x}_1 &=& x_5\\
\dot{x}_2 &=& x_6\\
\dot{x}_3 &=& x_7\\
\dot{x}_4 &=& x_8\\
\dot{x}_5 &=& \frac{1}{500}(F_A + F_P + F_{SH}) - 9.8\\
\dot{x}_6 &=& \frac{1}{200}(2.5F_A - 2F_P - F_{SH})\cos x_2\\
\dot{x}_7 &=& \frac{1}{40}(-12064(x_3 - 0.7) + F_A) - 9.8\\
\dot{x}_8 &=& \frac{1}{50}(-9000(x_4 - 0.8) + F_P) - 9.8
\end{array}$$

Riscrivendo il sistema nelle nuove varibili di stato $w = x - x_{eq}$ e linearizzando il sistema traslato con eqilibrio nell'origine, si ottiene il sistema lineare $\dot{w} = Aw + Bu$, dove

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
18 & 1.5 & -8 & -10 & 0.75 & 0.08 & -0.35 & -0.4\\
0 & 221.25 & -50 & 50 & 0.19 & 9.47 & -2.19 & 2\\
100 & 250 & -401.6 & 0 & 4.38 & 10.9 & -4.37 & 0\\
100 & -200 & 0 & -280 & 4 & -8 & 0 & -4
\end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 1.5\\ -3.75\\ 0\\ 0 \end{bmatrix},$$

B) La matrice di raggiungibilità del sistema, facilmente ottenibile con il comando `Matlab` `ctrb(A,B)`, ha rango pieno, pertanto il sistema così ottenuto è completamente raggiungibile.

Nel caso in cui l'uscita sia $y = Z_S = x_1$ si ha ovviamente $\mathbf{C}_{Z_S} = [1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0]$, da cui risulta che la matrice di osservabilità, ottenibile con il comando `Matlab` $ctrb(A', C'_{Z_S})$, ha rango pieno. Pertanto il sistema così ottenuto è completamente osservabile.

Nel caso in cui la misura disponibile sia invece $y = \theta = x_2$, il vettore delle uscite risulta $\mathbf{C}_\theta = C = [0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0]$. Dalla analisi della matrice di osservabilità del sistema in questo secondo caso, si ha ancora un sistema completamente osservabile.

C) La funzione di trasferimento del sistema risulta

$$G(s) = \frac{1.5\,s^6 - 1.95\,s^5 + 651.8\,s^4 - 5573\,s^3 - 43920\,s^2 - 1565\,10^3\,s - 2.759\,10^7}{s^8 - 1.85\,s^7 + 464.4\,s^6 - 3760\,s^5 - 2.937\,10^4\,s^4 - 8.848\,10^5\,s^3 - 1.647\,10^7\,s^2 + 1.803\,10^7\,s + 2.137\,10^8}$$

La stabilizzazione del sistema con tecniche nel dominio della frequenza è piuttosto difficoltosa in seguito alla posizione dei poli dell'anello aperto. Applichiamo quindi la tecnica di progetto del regolatore nello spazio di stato allo scopo di avere un sistema stabile. Si potrà in seguito aggiungere un anello esterno (in cascata) tornando alle tecniche classiche di progetto (ad esempio sui diagrammi di Bode), per migliorare la rispondenza alle eventuali specifiche di progetto.

Scegliamo, ad esempio, di porre gli autovalori in anello chiuso in $p = [-20.0347 \quad -2.1304 + 19.5122i \quad -2.1304 - 19.5122i \quad -3.2322 + 16.3771i \quad -3.2322 - 16.3771i \quad -7.5465 \quad -6.4114 \quad -2.1643\ ]$. La retroazione che alloca i poli di $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ nelle posizioni desiderate è data da $\mathbf{K} = [-30.3694 \quad -179.3158 \quad 17.7002 \quad -23.2502 \quad -9.6585 \quad -16.8586 \quad 1.3322 \quad -0.5685]$, come si trova facilmente col comando `K=acker(A,B,p)` di `Matlab`.

I poli dell'osservatore possono essere posti ad esempio in $q = [-17.2005 \quad -1.5112 + 19.4897i \quad -1.5112 - 19.4897i \quad -1.1177 + 16.0045i \quad -1.1177 - 16.0045i \quad -10.1799 \quad -3.7249 \quad -3.3489]$. Il valore della matrice $\mathbf{L}$ di iniezione delle uscite sugli stati che pone gli autovalori di $\mathbf{A} - \mathbf{LC}$ in q,

calcolato mediante il comando `L=transpose(acker(A',C',q))`, è dato da
$\mathbf{L} = [293.6 \quad 41.6 \quad 101.4 \quad 90.0 \quad 1102.6 \quad 861.2 \quad 784.0 \quad -37.2]$. Il compensatore basato sul regolatore appena progettato si costruisce col comando `rsys=reg(sys,K,L)`, mentre il sistema regolato a 16 stati si ottiene con il comando `fsys=feedback(series(rsys,sys),1,+1)`.

La scelta del posizionamento dei poli del sistema in anello chiuso è stata fatta cercando di minimizzare una funzione costo in cui si tiene conto sia degli stati che degli ingressi del sistema. In particolare la tecnica denominata LQR (che non è stata svolta durante il corso) si basa sulla minimizzazione della funzione costo

$$J = \int (x^T Q x + u^T R u) dt$$

soggetta al vincolo della dinamica $\dot{x} = Ax + Bu$, dove Q e R sono delle matrici peso delle dimensioni appropriate. Il comando matlab `K=lqr(A,B,Q,R)` restituisce la matrice di retroazione ottima, mentre il comando `L=lqr(A',C',Q,R)` restituisce la matrice dello stimatore ottima. In particolare nell'esempio numerico cosiderato abbiamo scelto $Q = 5eye(8)$ e $R = 1$ dando più peso alla minimizzazione degli stati in modo da consentirne una più veloce convergenza all'equilibrio. Inoltre la scelta dare un peso più elevato agli stati ci assicura che, applicando il regolatore progettato al sistema non lineare, lo stato non evolva al di fuori dalla regione di asintotica stabilità.

D) Se il sistema in anello chiuso deve inseguire riferimenti (ovvero reiettare disturbi) costanti con errore nullo, il compensatore deve contenere uno o più poli nell'origine. Poniamo dunque un nuovo impianto che contenga l'integratore posto in serie con il sistema (comando matlab `zsys=series(sys, tf(1,[1 0]))`), per poi applicare la sintesi del regolatore mediante le stesse tecniche sopra viste (in cui si tenga conto dell'aumentato numero di stati), ottenendo un nuovo regolatore `rzsys=reg(zsys, zK,zL)`. Il polo nell'origine sarà in ultima istanza implementato nel regolatore stesso, che risulterà pertanto dato da `series(rzsys,tf(1,[1 0]))`.

E) Si cerca ora una sequenza di al più $30 = \frac{3sec}{0.1sec}$ controlli che siano limitati e che facciano variare lo stato $x_2 = \theta$ da 0 a $\pi/10$ considerando le altre variabili di stato in condizioni di equilibrio e quindi nulle. Si chiede quindi di discretizzare il sistema con tempo di campionamento di $\Delta T = 0.1sec$ e quindi pianificare in al più 30 passi la traiettoria desiderata per la variabile x_2 tenendo conto di un vincolo sugli ingressi.

Con la tecnica di integrazione di Eulero in avanti si ottiene che le matrici del sistema discretizzato risultano $A_k = A\Delta T + eye(8)$, $B_k = B\Delta T$, $C_k = C$ e $D_k = 0$. Il sistema discretizzato risulta completamente raggiungibile ed è quindi possibile applicare tecniche di pianificazione ottima.

Una procedura automatica per il calcolo della matrice di raggiungibilità in 30 passi Rck è data da

```
Rck = bk;
for i=1:29
    [m,n] = size(Rck);
    RR = Rck(:,n);
    Rck = [Rck,Ak*RR];
end
```

La sequenza di controlli a modulo minimo che porta il sistema dallo stato iniziale

```
x0 = [0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0]
```

allo stato finale

```
xt = [0; pi/10; 0; 0; 0; 0; 0; 0]
```

è data dalla soluzione del problema di pianificazione ottima e cioè da

```
u30 = Rck' * inv(Rck * Rck')*(xt - Ak^30*x0).
```

La sequenza di 30 controlli così trovata verifica il limite imposto sul modulo.

La soluzione trovata è ottima rispetto ai controlli e verifica le specifiche imposte. Per trovare il numero minimo di passi necessari per risolvere il problema, si deve procedere per tentativi, partendo dal minimo numero di passi necessari per raggiungere lo stato finale xt e verificando, per ispezione diretta, che i controlli verificano le specifiche imposte. Ispezionando la matrice di raggiungibilità Rck, si nota che lo stato finale xt appartiene allo spazio generato dalle prime due colonne

$$Rck = \begin{bmatrix} 0 & 0.0150 \\ 0 & -0.0375 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.1500 & 0.1583 \\ -0.3750 & -0.7273 \\ 0 & -0.3431 \\ 0 & 0.3600 \end{bmatrix},$$

(2 passi), rispetto alla quale la sequenza dei controlli risulta pari a $[u(0) = -0.0446;\ u(0.1) = 0.0811]$. Questa è quindi la sequenza minima di ingressi necessaria per risolvere il problema.

F) Si consideri nuovamente il sistema discretizzato con la tecnica di Eulero in avanti, ma con tempo di campionamento pari a $\Delta T = 0.5 sec$. Il sistema dato dalle matrici $A_t = A\Delta T + eye(8)$, $B_t = B\Delta T$, $C_t = C$ e $D_t = 0$ risulta completamente osservabile. Nel caso in cui le letture non siano affette da errori di misura, è noto dalla teoria che lo stato iniziale $x(0) = x_0$ sarà ricostruibile in al più 8 passi. Infatti le letture nei vari passi sono date da

$$\begin{aligned} &y(0) = C_t x_0 \\ &y(1) = C_t x(1) = C_t A_t x_0 + C_t B_t u(0) \\ &\vdots \\ &y(7) = C_t x(7) = C_t A_t^7 x_0 + C_t A_t^6 B u(0) + \ldots + C_t B_t u(6) \end{aligned}$$

Dato che A_t, B_t, C_t e u sono note senza incertezza, così come le letture $y(i)$, $i = 0, \ldots, 7$, si ha che lo stato iniziale x_0 si ottiene come soluzione del sistema lineare di 8 equazioni in 8 incognite: $W = O_t x_0$, dove O_t è la matrice di osservabilità in 8 passi e la matrice W contiene tutti i termini noti. La completa osservabilità del sistema discretizzato assicura che la soluzione del sistema lineare esiste ed è unica: $x_0 = O_t^{-1} W$. Sará possibile ricostruire lo stato iniziale in 8 passi, corrispondenti ad un tempo pari a $3.5 sec = 7\,\Delta T sec$.

Nel caso di rumore di misura è necessario implementare una procedura di stima ottima in quanto non è possibile ricostruire esattamente lo stato iniziale.