

Figure 1: Modello di satellite in orbita geostazionaria.

Si consideri un satellite di massa $m = 20kg$ che ruota intorno alla Terra. Sul satellite si può agire tramite un attuatore che produce una *spinta radiale* e un attuatore che produce una *spinta tangenziale*, vedere figura . La dinamica del satellite è data dalle equazioni:

$$\begin{cases} \ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - \frac{GM}{r^2} + \frac{1}{m}u_1 \\ \ddot{\theta} = -2\frac{\dot{r}\dot{\theta}}{r} + \frac{1}{mr^2}u_2 \end{cases} \quad (1)$$

Dove r è la distanza dal centro della terra e θ è l'angolo formato con un sistema di riferimento fisso. Sia inoltre $G = \frac{6.6710^{-11}Nm^2}{Kg^2}$ la costante gravitazionale e $M = 5.98 \cdot 10^{24}Kg$ la massa della terra.

- A** Si determinino tutti i moti di riferimento corrispondenti a $u_1 = u_2 = 0$ e alla quota costante $r(t) = r_0 = 210^3km$.
- B** Si determinino le matrici dinamiche del sistema linearizzato intorno ai moti di riferimento ottenuti.
- C** Si determini di quale attuatore è necessario disporre per poter raggiungere posizioni angolari e radiali arbitrarie, nei limiti in cui vale il modello linearizzato, in tempo arbitrario.
- D** Sul satellite sono disponibili anche due sensori che sono in grado di determinare lo scostamento radiale dall'orbita di riferimento e lo scostamento angolare. Si determini di quale sensore è necessario disporre per poter ricostruire completamente il moto del satellite intorno al moto di riferimento.
- E** In riferimento all'attuatore e sensore determinati ai punti precedenti, si progetti un compensatore basato su regolatore in modo tale che il sistema retroazionato sia asintoticamente stabile, nei limiti in cui vale il modello linearizzato.
- F** Si realizzi una simulazione numerica del comportamento del sistema ottenuto connettendo il compensatore ottenuto al passo precedente con il sistema non lineare e si commentino le simulazioni ottenute.
- G** Si supponga ora di avere a disposizione la conoscenza diretta degli stati del sistema 1. Si studi una legge di controllo non lineare che stabilizzi il sistemi in ambiti più ampi di quelli in cui vale l'approssimazione lineare. SUGGERIMENTO: si consiglia di traslare il sistema 1 nelle coordinate in cui l'equilibrio risulta nell'origine.

Si confrontino i risultati delle diverse procedure di controllo.

Soluzione

A Il moto del sistema corrispondente a $u_1 = u_2 = 0$ e $r(t) = r_0$ è caratterizzato da $r_0^3 \dot{\theta} = GM$ da cui segue $\dot{\theta} = \omega_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0^3}}$. Il moto di riferimento è quindi un moto circolare uniforme con velocità angolare ω_0 .

$$\begin{aligned} r(t) &= r_0 \\ \theta(t) &= \omega_0 t + \theta_0 \end{aligned} \quad (2)$$

B Si scelgano come variabili di stato le variabili $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (r - r_0, \theta - \omega_0 t - \theta_0, \dot{r}, \dot{\theta} - \omega_0)$. Nelle nuove coordinate si ha

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = (x_1 + r_0)(x_4 + \omega_0)^2 + \frac{GM}{(x_1 + r_0)^2} + \frac{1}{m} u_1 \\ \dot{x}_4 = -2x_3 \frac{(x_4 + \omega_0)}{(x_1 + r_0)} + \frac{1}{m(x_1 + r_0)^2} u_2 \end{cases} \quad (3)$$

La matrice dinamica risulta:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3\omega_0^2 & 0 & 0 & 2r_0\omega_0 \\ 0 & 0 & -2\frac{\omega_0}{r_0} & 0 \end{bmatrix},$$

C I due possibili vettori di ingresso associati a u_1 e u_2 risultano

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{mr_0^2} \end{bmatrix}$$

Ingresso u_1 : Con l'attuatore associato a u_1 si ha che la matrice di raggiungibilità risulta

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m} & 0 & -\frac{\omega_0^2}{m} \\ 0 & 0 & -2\frac{\omega_0}{r_0 m} & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & -\frac{\omega_0^2}{m} & 0 \\ 0 & -2\frac{\omega_0}{r_0 m} & 0 & 2\frac{\omega_0^3}{r_0 m} \end{bmatrix}$$

Il sistema con questo attuatore non è completamente raggiungibile.

Ingresso u_2 : Con l'attuatore associato a u_2 si ha che la matrice di raggiungibilità risulta

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{2\omega_0}{mr_0} & 0 \\ 0 & \frac{1}{mr_0^2} & 0 & -4\frac{\omega_0^2}{mr_0^2} \\ 0 & \frac{2\omega_0}{mr_0} & 0 & -2\frac{\omega_0^3}{mr_0} \\ \frac{1}{mr_0^2} & 0 & -4\frac{\omega_0^2}{mr_0^2} & 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema risulta completamente raggiungibile ed è quindi possibile raggiungere posizione angolari e radiali arbitrarie in tempo arbitrario (nei limiti della validità del modello linearizzato).

D Uscita x_1 Se si considera il sensore che legge lo scostamento radiale si ha che il vettore di uscita risulta

$$C_r = [1 \ 0 \ 0 \ 0].$$

La matrice di osservabilità è

$$O_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3\omega_0^2 & 0 & 0 & 2r_0\omega_0 \\ 0 & 0 & -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema ottenuto utilizzando questo sensore non è completamente osservabile.

Uscita x_2 Se si considera il sensore che legge lo scostamento angolare si ha che il vettore di uscita risulta

$$C_\theta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

la matrice di osservabilità

$$O_\theta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2\frac{\omega_0}{r_0} & 0 \\ -6\frac{\omega_0^3}{r_0} & 0 & 0 & -4\omega_0^2 \end{bmatrix}$$

Utilizzando il sensore che legge lo scostamento angolare è possibile ricostruire il moto del satellite intorno al moto di riferimento.

E È possibile progettare un compensatore basato sul regolatore che renda il sistema asintoticamente stabile nel caso in cui si disponga dell'attuatore tangenziale (u_2) e del sensore che legge lo scostamento angolare.

Si consideri ora il sistema con ingresso u_2 e uscita x_2 , sia $sys = ss(A, B, C_\theta, 0)$, il progetto del compensatore basato sul regolatore si ottiene con i seguenti comandi matlab:

- Retroazione: la matrice di retroazione K tale che gli autovalori di $A - BK$ siano in $p = -0.1, -0.2 + 0.1i, -0.2 - 0.1i - 0.3$ è ottenibile dal comando matlab

```
>>p = [ -0.1 -0.2+0.1*i -0.2-0.*i -0.3];
>>K=acker(A,B,p)
K =
```

```
1.0e+014 *
0.0000 -6.4182 0.0002 0.6400
```

- Stimatore: la matrice L di iniezione delle uscite sugli stati tale che gli autovalori di $A - LC$ siano in $-0.2, -0.4 + 0.2i, -0.4 - 0.2i - 0.6$ è ottenibile dal comando matlab

```
>>q = 2*p
>>L=transpose(acker(A',C',q))
L =
```

```
1.0e+010 *
-1.8309
0.0000
-0.0032
0.0000
```

- Compensatore: il compensatore basato sul regolatore si ottiene con il comando matlab `rsys=reg(sys,K,L)`. La funzione di trasferimento $R(s)$ del regolatore (ottenibile con il comando `tf(rsys)`) risulta

$$R(s) = \frac{2.201 \cdot 10^{18} s^3 + 6.651 \cdot 10^{16} s^2 + 4.313 \cdot 10^{14} s + 1.232 \cdot 10^{13}}{s^4 + 2.4s^3 + 2.43s^2 + 2.751 \cdot 10^4 s + 831.8}$$

F Lo schema simulink per la simulazione del sistema non lineare controllato con il regolatore progettato sul sottosistema osservabile e raggiungibile del linearizzato è riportato in figura 2. Nel blocco *Sistema non lineare* si trova la dinamica non lineare del sistema. Nel blocco *Compensatore* ci sono le matrici del compensatore basato sul regolatore. Nel blocco *Traslazione* si traslano le variabili per portare l'equilibrio nell'origine. Nel blocco *Integratore* si inseriscono i valori iniziali del moto di equilibrio che si vanno poi a perturbare per simulare il comportamento del sistema al di fuori del punto di equilibrio.

G Si trasli il sistema con equilibrio nell'origine, ossia si prenda nuovamente in considerazione il sistema non lineare con variabili di stato $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (r - r_0, \theta - \omega_0 t - \theta_0, \dot{r}, \dot{\theta} - \omega_0)$, con dinamica:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ (x_1 + r_0)(x_4 + \omega_0)^2 + \frac{GM}{(x_1 + r_0)^2} \\ -2x_3 \frac{(x_4 + \omega_0)}{(x_1 + r_0)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m} \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m(x_1 + r_0)^2} \end{bmatrix} u_2 \rightarrow \dot{x} = f(x, u) \quad (4)$$

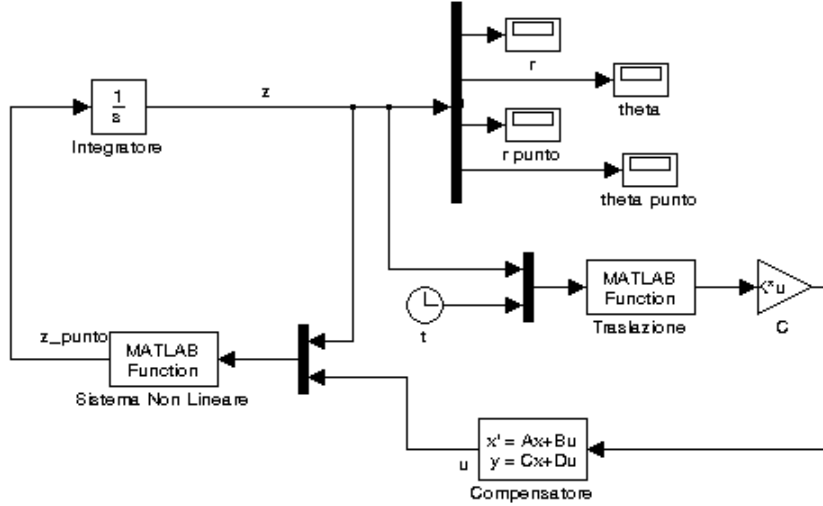


Figure 2: Schema Simulink del sistema non lineare controllato con il regolatore che ha come ingresso τ e come uscita θ .

Si scelga una candidata di Lyapunov quadratica (p.d.):

$$\mathbf{V}(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2), \quad (5)$$

e si valuti la sua derivata direzionale lungo le traiettorie del sistema:

$$L_f \mathbf{V}(x) = x_1 x_3 + x_2 x_4 + x_3 \left((x_1 + r_0)(x_4 + \omega_0)^2 + \frac{GM}{(x_1 + r_0)^2} \right) + \frac{1}{m} x_3 u_1 - 2x_4 x_3 \frac{(x_4 + \omega_0)}{(x_1 + r_0)} + \frac{1}{m(x_1 + r_0)^2} x_4 u_2 \quad (6)$$

Si noti come l'averne due ingressi indipendenti per entrambe le equazioni dinamiche sia una semplificazione notevole per la ricerca del controllo stabilizzante. È infatti possibile linearizzare il sistema utilizzando i due ingressi. Si consideri a tal proposito la derivata direzionale della candidata di Lyapunov: con ciascun controllo è possibile eliminare il termine non lineare associato ottenendo una derivata direzionale quadratica nelle variabili di stato. Controlli in grado di garantire la linearizzazione sono ad esempio:

$$\begin{cases} u_1 = -m(x_1 + (x_1 + r_0)(x_4 + \omega_0)^2 + \frac{GM}{(x_1 + r_0)^2}) - mx_3 \\ u_2 = -m(x_1 + r_0)^2(x_2 - 2x_3 \frac{(x_4 + \omega_0)}{(x_1 + r_0)}) - m(x_1 + r_0)^2 x_4 \end{cases}, \quad (7)$$

che, una volta sostituiti nella (6), danno come risultato $L_f \mathbf{V}(x) = -x_3^2 - x_4^2$ che è s.n.d.. Per concludere sulla asintotica stabilità dell'equilibrio (l'origine, per questo sistema traslato) è necessario applicare Krasovskii-Lasalle: $\Omega_x = \{x \in \mathbb{R}^4 | L_f \mathbf{V}(x) = 0\}$ contiene i punti $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0, 0), \forall \bar{x}_1, \bar{x}_2$. Il sistema dinamico valutato in questi punti ha la seguente dinamica:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\bar{x}_1 \\ -\bar{x}_2 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

dalla quale si evince che l'unica traiettoria del sistema interamente contenuta nell'insieme invariante massimo Ω_x è l'origine. Da questo segue l'asintotica stabilità dell'equilibrio.

Per quanto riguarda la R.A.S. è necessario andare a vedere dove la funzione di Lyapunov e la sua derivata direzionale restano ben definite in segno: in questo caso tutto lo spazio di stato fa parte della R.A.S. tranne il punto $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-r_0, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4)$ dove né le equazioni dinamiche né i controlli stabilizzanti (u_1, u_2) sono ben definiti. Si noti altresì che tale punto corrisponde ad avere il satellite posizionato nel centro della terra.

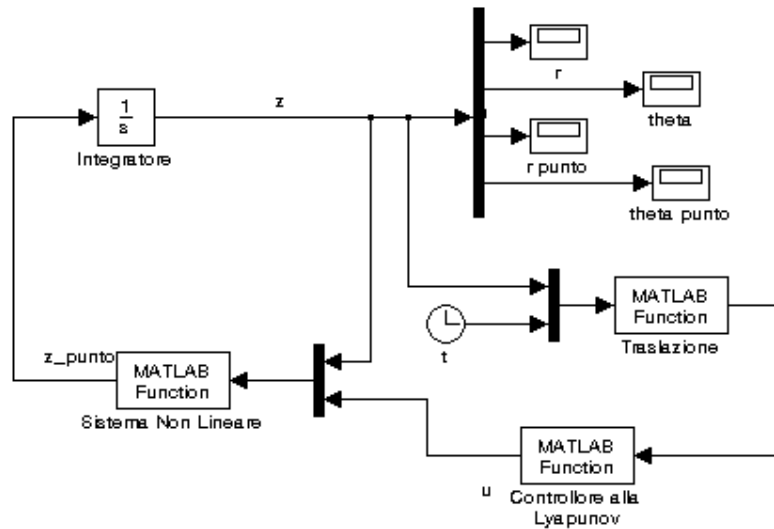


Figure 3: Schema Simulink del sistema non lineare controllato con la tecnica di Lyapunov.

Lo schema simulink per effettuare simulazioni dell'andamento delle variabili di stato del sistema non lineare controllato con la tecnica descritta è riportato in figura 3.

Nel blocco *Controllore alla Lyapunov* viene richiamata la seguente funzione

```
function out = LyapunovController(in)
m=20;
G=6.67*10^(-11);
M=5.98*10^(24);
r0=2*10^6;
omega=sqrt(G*M/r0^3);
% Input parser
y1 = in(1);
y2 = in(2);
y3 = in(3);
y4 = in(4);

% Controls
u1 = - y1 * m - m * (y1 + r0) * (y4 + omega)^2 + G * M * m / (y1 + r0)^2 - y2 * m;
u2 = - y2 * m * (y1 + r0)^2 + y3 * omega * m * (y1 + r0) - y4 * m * (y1 + r0)^2;

% Output
out(1) = u1;
out(2) = u2;
```

Mentre nel blocco *Sistema non lineare* si deve tenere conto che ci sono entrambi gli ingressi a differenza del caso in cui si controllava il sistema non lineare con il compensatore basato sul regolatore in cui si usava il solo ingresso u_2 . Simulando entrambi gli schemi simulink i due controllori progettati si vede che variando anche di poco le condizioni iniziali dell'integrazione e quindi perturbando leggermente il sistema si possono mettere in luce le differenze tra i due progetti di controllo. Infatti considerando le condizioni iniziali $[210^6 + 1, 0, 0, 0.00706103745918]$ si ha che gli andamenti delle variabili per entrambi i tipi di controllo convergono, vedere figure ?? e 5.

Mentre con condizioni iniziali $[210^6 + 1, 0, 0, 0.00706103745918]$ si ha che gli andamenti delle variabili per il sistema ottenuto con il regolatore divergono dopo 50 secondi di simulazione (vedere figura 6) mentre per il controllo alla Lyapunov si ha comunque convergenza anche per condizioni iniziali che comportano uno scostamento dal moto di equilibrio sostanzioso $[210^6 + 10^6, 0, 0, 0.00706103745918]$ (vedere figura 7).

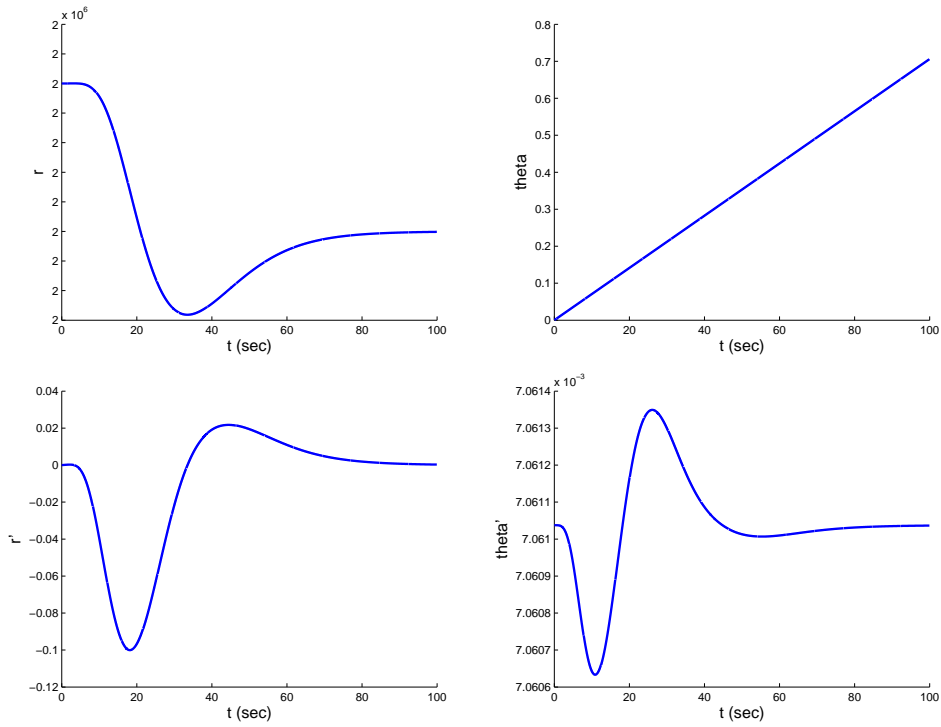


Figure 4: Andamento delle quattro variabili di stato (non traslate) nel caso di stabilizzazione tramite controllo basato sul regolatore, il sistema converge al moto di equilibrio.

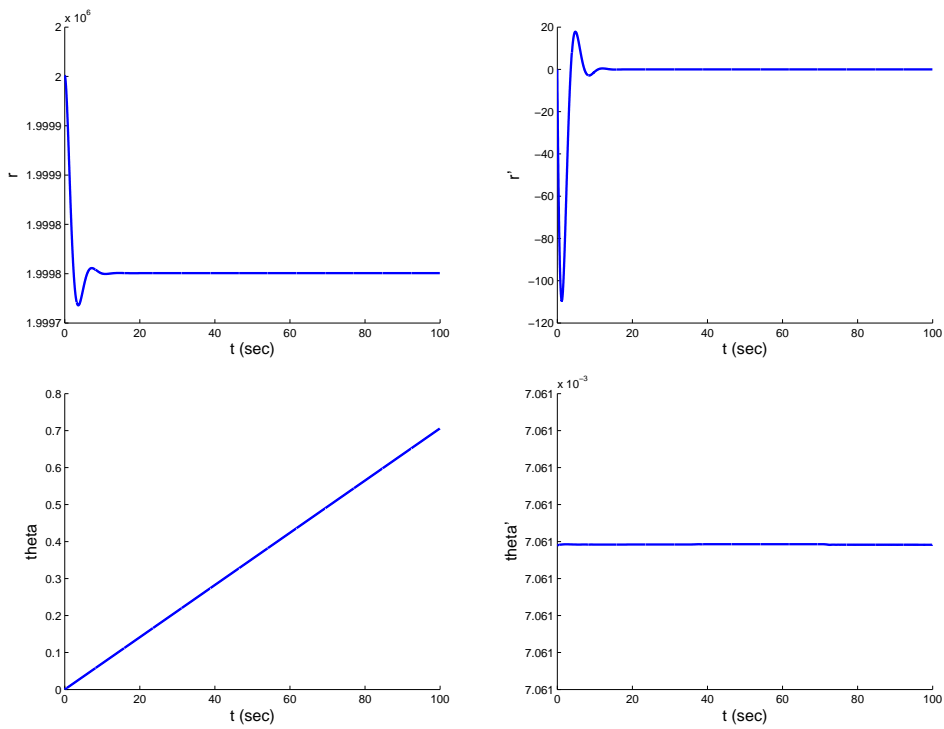


Figure 5: Andamento delle quattro variabili di stato (non traslate) nel caso di stabilizzazione tramite controllo non lineare studiato direttamente con Lyapunov.

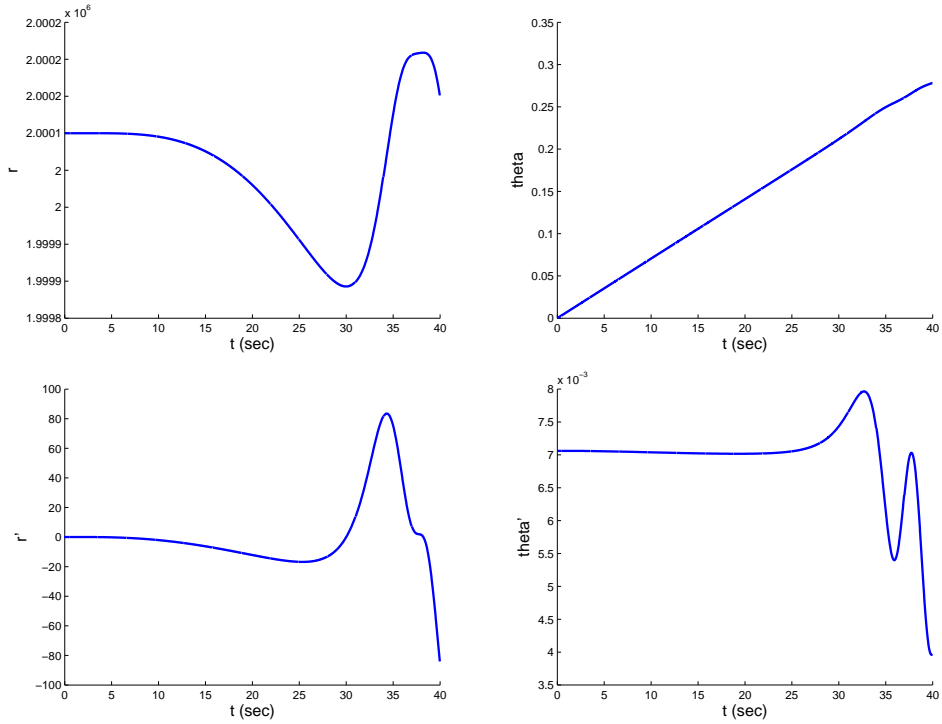


Figure 6: Andamento delle quattro variabili di stato (non traslate) nel caso di stabilizzazione tramite controllo basato sul regolatore, pochi istanti di simulazione dopo il programma Matlab dà un messaggio di errore perché le variabili divergono.

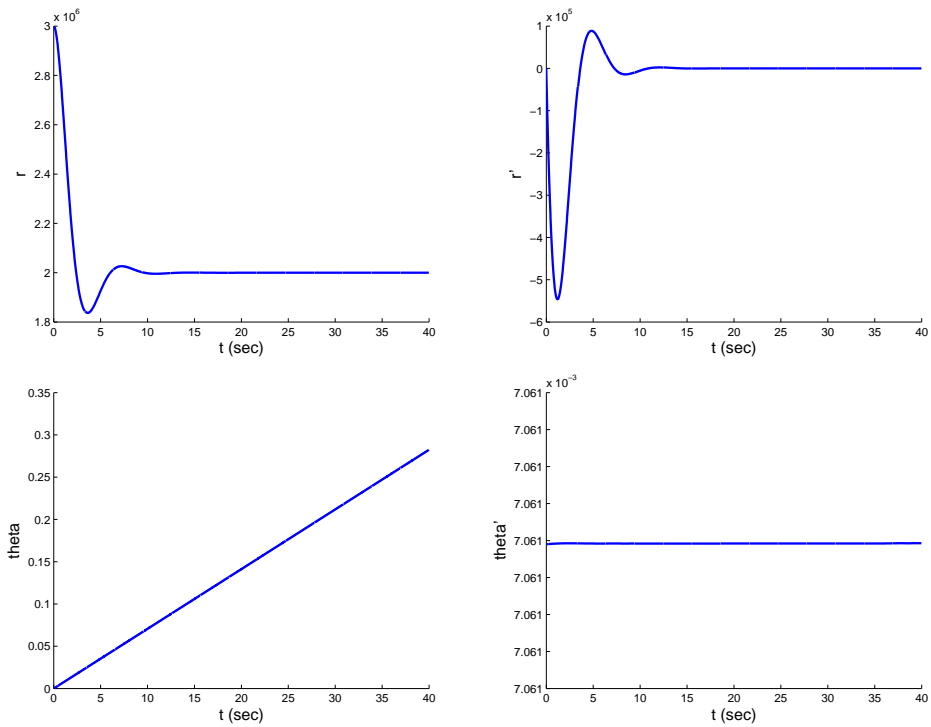


Figure 7: Andamento delle quattro variabili di stato (non traslate) nel caso di stabilizzazione tramite controllo non lineare studiato direttamente con Lyapunov.