

Numero di matricola

-	-	$= 10\alpha - 1$	$= 10\beta - 1$	$= 10\gamma - 1$	-
---	---	------------------	-----------------	------------------	---

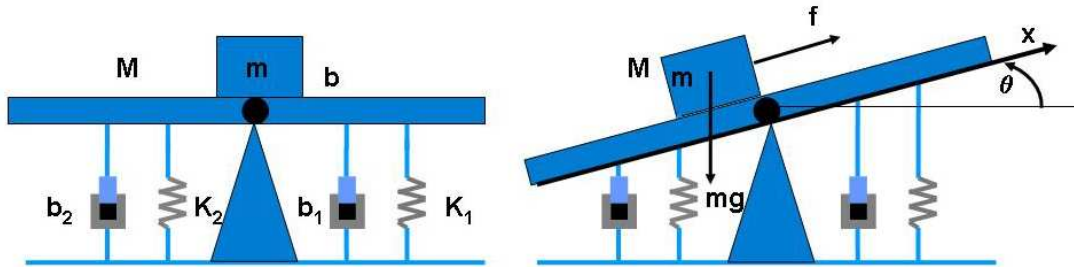


Figure 1: Modello del sistema

Si consideri il sistema riportato in fig.1 in cui un corpo di massa  $m$  scorre su una piattaforma che puo' ruotare liberamente attorno ad un asse passante per il suo baricentro. La piattaforma, di massa  $M$  e lunghezza  $L$ , è ancorata a terra tramite due molle e due smorzatori collegati alle sue estremità. Siano  $b$  il coefficiente di attrito radente tra il corpo e la piattaforma, e  $b_1$  e  $b_2$  i coefficienti di attrito dei due smorzatori. Siano  $k_1$  e  $k_2$  le costanti elastiche delle due molle. Siano  $\theta$  l'angolo che la piattaforma forma con l'asse orizzontale e  $x$  la distanza del corpo dall'asse di rotazione.

I valori numerici del sistema sono i seguenti:  $m = 0.5Kg$ ,  $M = 5Kg$ ,  $L = 0.5m$ ,  $k_1 = (1 + \alpha 10^{-2})N/m$ ,  $k_2 = (10 + \beta 10^{-1})N/m$ ,  $b = 5Ns/m$ ,  $b_1 = (1 + \gamma 10^{-2})Ns/m$ ,  $b_2 = 10Ns/m$ ,  $g = 9.8m/s^2$ .

La dinamica del sistema risulta

$$\begin{cases} m \ddot{x} = f - b \dot{x} + m x \dot{\theta}^2 - m g \sin \theta, \\ \left( \frac{1}{12} M L^2 + m x^2 \right) \ddot{\theta} = -m g x \cos \theta - 2 m x \dot{x} \dot{\theta} - (k_1 + k_2) \left( \frac{L}{2} \right)^2 \sin \theta \cos \theta - (b_1 + b_2) \left( \frac{L}{2} \right)^2 \cos^2(\theta) \dot{\theta}. \end{cases}$$

- A) Si trovino gli equilibri del sistema per  $f = 0$ .
- B) Si voglia controllare, agendo mediante la forza  $f$ , la distanza  $x$  del corpo di massa  $m$  calcolata rispetto all'asse di rotazione della piattaforma. A tal fine, si linearizzi il sistema nell'intorno del punto di equilibrio corrispondente ad un angolo  $\theta$  di modulo minimo, riportando la forma di stato e la funzione di trasferimento del sistema ottenuto. Infine, si discuta la stabilità del sistema linearizzato.
- C) Si considerino le seguenti specifiche funzionali da tradurre in specifiche formali di progetto:
- C1) Assumendo che continui ad essere valida l'approssimazione lineare, il corpo di massa  $m$  deve raggiungere la posizione  $\hat{x} = 24$  cm con un errore a regime non superiore all'1% e senza superare il limite della piattaforma. Si richiede inoltre che la massa raggiunga e mantenga la posizione desiderata entro una tolleranza del 5% in un tempo non superiore a 0.01 s.
  - C2) La posizione della massa  $m$  viene misurata attraverso un potenziometro affetto da disturbi periodici di frequenza non inferiore a 1 kHz e di ampiezza non superiore a 1mm. Si richiede che l'effetto di tali disturbi sulla posizione regolata della massa sia limitato ad al più  $\pm 0.025$ mm.
  - C3) Si progetti un controllore in modo che siano verificate le specifiche suddette e si riporti la forma del controllore progettato con i diagrammi asintotici ottenuti durante la fase di progetto.
  - C4) Si simuli l'andamento della risposta al gradino di ampiezza pari a 24cm del sistema controllato e si riporti il grafico ottenuto discutendone le caratteristiche che evidenziano il soddisfacimento delle specifiche di progetto.

## Soluzioni

A) Per trovare i punti di equilibrio relativi all'ingresso  $f = 0$ , è necessario porre  $\ddot{x} = 0$ ,  $\dot{x} = 0$ ,  $\ddot{\theta} = 0$  e  $\dot{\theta} = 0$ . Si ottiene in questo modo il seguente sistema:

$$\begin{cases} 0 = -m g \sin \theta, \\ 0 = -x m g \cos \theta - (k_1 + k_2) \left(\frac{L}{2}\right)^2 \sin \theta \cos \theta. \end{cases}$$

La prima equazione risulta soddisfatta per valori dell'angolo  $\theta = k\pi$ , con  $k$  intero, che sostituiti nella seconda equazione impongono  $x = 0$ . Pertanto gli equilibri del sistema risultano  $\hat{X} = [x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}]^T = [0, 0, 0, 0]^T$ .

B) Scegliendo come variabili di stato  $[z_1, z_2, z_3, z_4]^T = [x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}]^T$  il sistema può essere riscritto nel seguente modo:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_3 \\ \dot{z}_2 = z_4 \\ \dot{z}_3 = \frac{f}{m} - \frac{b}{m} z_3 + z_1 z_4^2 - g \sin z_2 \\ \dot{z}_4 = -\frac{m g}{J(z_1)} z_1 \cos z_2 - \frac{(k_1+k_2) L^2}{J(z_1)} \frac{L^2}{4} \sin z_2 \cos z_2 - \frac{(b_1+b_2) L^2}{J(z_1)} \frac{L^2}{4} \cos^2(z_2) z_4 - 2 m z_1 z_3 z_4, \end{cases} \quad (1)$$

con  $J(z_1) = \left(\frac{1}{12} M L^2 + m z_1^2\right)$ .

Linearizzando il sistema in un intorno del punto di equilibrio  $\hat{X} = [0, 0, 0, 0]^T$ , si ottiene

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -g & -\frac{b}{m} & 0 \\ -12 \frac{m g}{M L^2} & -3 \frac{k_1+k_2}{M} & 0 & -3 \frac{b_1+b_2}{M} \end{bmatrix}.$$

Sostituendo ai parametri i rispettivi valori numerici calcolati per  $\alpha = \beta = \gamma = 0$  si ottiene:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -9.8 & -10 & 0 \\ -47.08 & -6.6000 & 0 & -6.6000 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori della matrice  $A$  risultano  $\lambda_1 = 1.8$ ,  $\lambda_2 = -3.8 + 3.05j$ ,  $\lambda_3 = -3.8 - 3.05j$ ,  $\lambda_4 = -10.82$ . Il sistema linearizzato risulta instabile, avendo un autovalore  $\lambda_1$  a parte reale positiva.

L'uscita del sistema é  $y = z_1$ , ovvero la posizione  $x$  del corpo. Il vettore delle uscite risulta quindi  $C = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$ . Inoltre dalla (1) risulta

$$B = [0, 0, \frac{1}{m}, 0]^T; \quad D = 0$$

Sostituendo ai parametri i rispettivi valori numerici si ricava

$$B = [0 \ 0 \ 2 \ 0]^T; \quad D = 0$$

La funzione di trasferimento tra l'uscita  $z_1$  e l'ingresso  $f$  risulta essere

$$G(s) = \frac{2(s + 1.229)(s + 5.371)}{(s - 1.8)(s + 10.82)(s^2 + 7.58s + 23.71)}$$

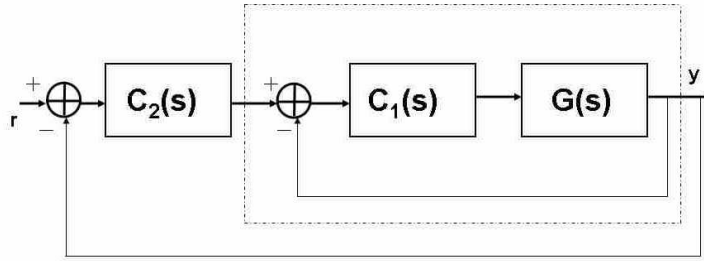


Figure 2: Schema di controllo con doppio anello di retroazione

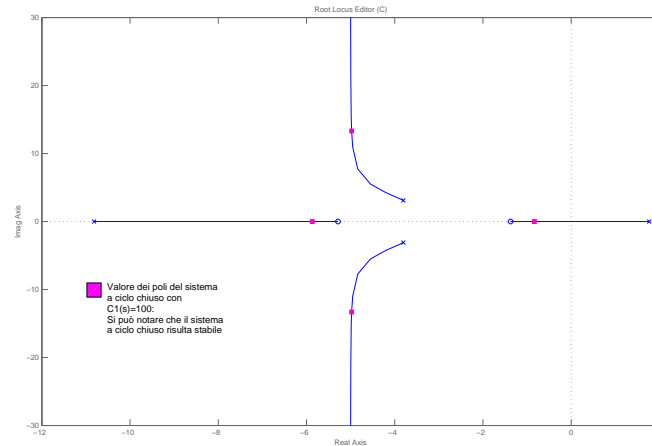


Figure 3: Luogo delle radici del sistema di partenza chiuso in retroazione con  $C_1(s)=100$

C) La presenza di un polo a parte reale positiva rende il sistema instabile a ciclo aperto. Prima di procedere al progetto di un controllore per soddisfare le specifiche richieste, è opportuno procedere ad una stabilizzazione del sistema. Il sistema di controllo sfrutterà un doppio anello di retroazione secondo lo schema riportato in fig.2.

Dal luogo delle radici riportato in figura 3 si nota che per stabilizzare il sistema è sufficiente un controllore proporzionale  $C_1(s) = K_1$  con guadagno ad esempio pari a  $K_1 = 100$

A questo punto la nuova funzione di trasferimento relativa all'anello interno sarà data da

$$G_1(s) = \frac{K_1 G(s)}{1 + K_1 G(s)}$$

Svolgendo i calcoli si ottiene

$$G_1(s) = \frac{200 (s + 5.371) (s + 1.229)}{(s + 5.93) (s + 0.7156) (s^2 + 9.954s + 202.2)}$$

Si noti che avendo stabilizzato il sistema è ora possibile usare i diagrammi di Bode per il progetto del controllore.

C1) Sulla base dello schema riportato in figura 2, sia  $C_2(s)$  il controllore dell'anello più esterno. Applicando il teorema del valor finale, per rispettare la specifica si deve imporre che

$$\frac{1}{1 + C_2(0) G_1(0)} < 0.01$$

da cui si deduce che il guadagno statico di  $C_2(s)$  deve risultare:

$$C_2(0) > \frac{1}{G_1(0)} \frac{(1 - 0.01)}{0.01}$$

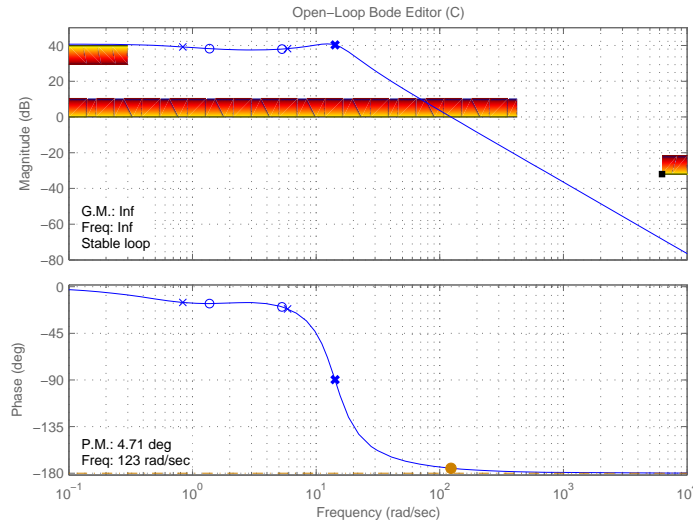


Figure 4: Diagramma di Bode del sistema controllato con  $C_1(s) = 100$  e  $C_2(s) = 75$ .

Essendo  $G_1(0) \simeq 1.53$  deve essere  $C_2(0) > 64.8$

Il sistema deve raggiungere un riferimento pari a  $0.24m$  senza superare i limiti della piattaforma, che corrispondono ad una distanza dall'asse di rotazione pari a  $L/2$ . Ciò vuol dire ammettere una sovraelongazione percentuale  $S \leq 100(0.25 - 0.24)/0.24 \simeq 4\%$  Utilizzando la formula  $S = e^{-\frac{\pi \delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$  valida per un sistema approssimabile ad un sistema del secondo ordine, si ottiene che il valore dello smorzamento deve essere  $\delta \simeq 0.71$ . Per garantire questa specifica il sistema deve avere approssimativamente un margine di fase non inferiore a  $M_\phi \simeq 71^\circ$ . Inoltre, dalla specifica si evince che il tempo di assestamento risulta  $T_a = 0.01s$ . Applicando la formula  $\omega_T = 3/(\delta T_a)$  si trova che la pulsazione di taglio deve avere un valore almeno pari a  $\omega_T = 3/(0.01 \cdot 0.71) \simeq 422.5 \text{ rad/s}$ .

Questa specifica non risulta soddisfatta come si può riscontrare dai diagrammi di Bode riportati in figura 4. Per aumentare la pulsazione di taglio ed il margine di fase del sistema chiuso in retroazione si può utilizzare una rete anticipatrice con zero in  $s = -16$  ed polo in  $s = -4000$ . Il controllore dell'anello esterno sarà pertanto

$$C_2(s) = 75 \frac{(1 + 0.035 s)}{(1 + 0.00025 s)}$$

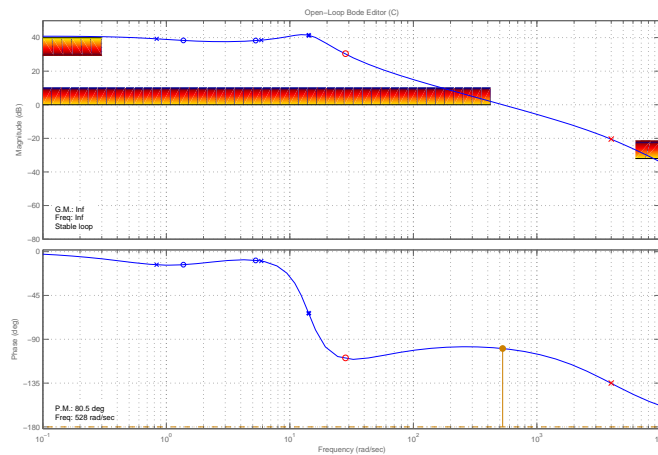


Figure 5: Diagramma di Bode del sistema controllato con  $C_1(s) = 100$  e  $C_2(s) = 75 \frac{(1+0.035 s)}{(1+0.00025 s)}$ .

**C2)** Tenendo presente che la relazione tra il disturbo  $D(j\omega)$  e l'uscita  $Y(j\omega)$  risulta

$$Y(j\omega) = -\frac{C_2(j\omega) G_1(j\omega)}{1 + C_2(j\omega) G_1(j\omega)} D(j\omega),$$

al fine di soddisfare la specifica deve risultare

$$\left\| \frac{C_2(j\omega) G_1(j\omega)}{1 + C_2(j\omega) G_1(j\omega)} \right\| \leq \frac{0.025 \cdot 10^{-3}}{10^{-3}} = \frac{1}{40}.$$

per  $\omega > 2\pi \text{ rad/s}$ . Pertanto si ha

$$\|C_2(j\omega) G_1(j\omega)\| \leq \frac{1}{40} \|1 + C_2(j\omega) G_1(j\omega)\| \leq \frac{1}{40} (1 + \|C_2(j\omega) G_1(j\omega)\|)$$

Trascurando il termine  $\|C_2 G_1\|$  rispetto a 1 al denominatore, la condizione da imporre diventa  $\|C_2 G_1\| \leq \frac{1}{40}$ , che in decibel risulta  $\|C_2 G_1\|_{db} = -32$ .

Questa specifica non risulta soddisfatta come si vede dai diagrammi di Bode riportati in fig.5. Aggiungendo un ulteriore polo in  $s = -4000$  si abbassa il guadagno di Bode nelle frequenze di interesse soddisfacendo la specifica richiesta, senza compromettere il margine di fase e la pulsazione di taglio precedentemente calcolati (vedi figura 6)

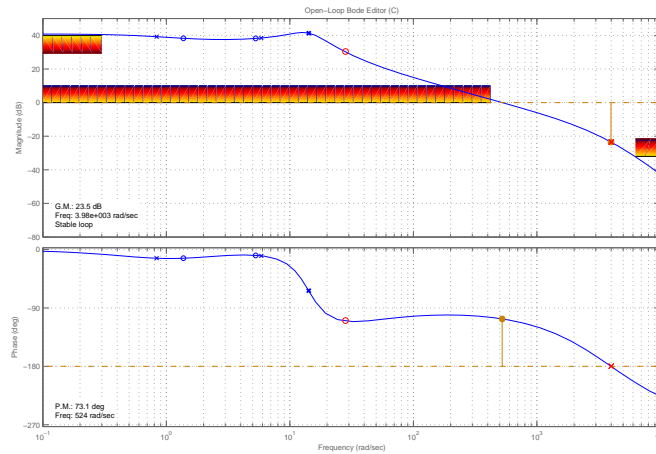


Figure 6: Diagramma di Bode del sistema controllato con  $C_1(s) = 100$  e  $C_2(s) = 75 \frac{(1+0.035 s)}{(1+0.00025 s)^2}$ .

**C3)** Il controllore finale ha la forma seguente:

$$C_2(s) = 75 \frac{(1 + 0.035 s)}{(1 + 0.00025 s)^2}$$

**C4)** La risposta al gradino di ampiezza 0.24 è riportata in figura 7. Si noti come la specifica sulla sovraelongazione massima e sul tempo di assestamento siano rispettate.

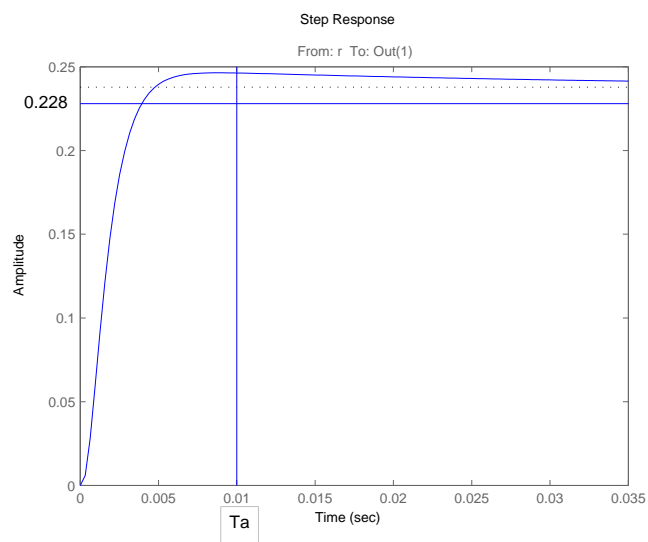


Figure 7: Risposta al gradino di ampiezza  $0.24m$ . Si noti come la specifica sulla sovranelongazione massima e sul tempo di assestamento siano rispettate.