

Numero di matricola

-	-	$= 10\alpha - 1$	$= 10\beta - 1$
$= 10\gamma - 1$	$= 10\delta - 1$		

Si consideri il modello monotraccia di autoveicolo riportato in fig. 1. Nell'ipotesi di approssimare il veicolo ad un corpo rigido dotato di moto piano, si indichino con  $u$  e  $v$  le componenti longitudinale e laterale della velocità del baricentro e con  $r$  la velocità di rotazione del veicolo.

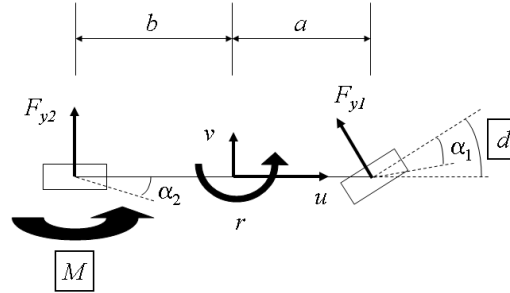


Figure 1: Modello monotraccia di autoveicolo

Nel caso in cui la velocità longitudinale  $u$  sia costante, il modello può essere descritto in base alle seguenti equazioni

$$\begin{cases} m(\dot{v} + ur) &= F_{y1} + F_{y2}, \\ J\dot{r} &= F_{y1}a - F_{y2}b + M, \end{cases}$$

con pneumatici dalla caratteristica lineare

$$F_{y1} = C_1\alpha_1, \quad F_{y2} = C_2\alpha_2,$$

ed angoli di deriva  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  legati all'angolo di sterzo  $d$  in base alle relazioni lineari

$$\alpha_1 = d - \frac{v + ra}{u}, \quad \alpha_2 = -\frac{v - rb}{u}.$$

Sia  $m = 1200 + \frac{\alpha}{10}$  kg la massa del veicolo,  $J = 1680 + \frac{\beta}{10}$  kgm<sup>2</sup> il suo momento di inerzia rispetto al baricentro,  $a = 1.2$  m e  $b = 1.4$  m i semipassi anteriore e posteriore,  $C_1 = C_2 = 100000 + \frac{\gamma}{10} \frac{\text{N}}{\text{rad}}$  le rigidzze di deriva dell'assale anteriore e dell'assale posteriore. La velocità longitudinale  $u$  è supposta costante e pari a  $20 + \frac{\delta}{10} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Il veicolo è inoltre dotato di un sistema di controllo della stabilità di marcia, in grado di generare, attraverso i pneumatici, un momento di imbardata  $M$  agente sull'assale posteriore: questo sistema potrebbe essere realizzato andando a frenare selettivamente le ruote posteriori. Si noti che il momento  $M$  può essere impiegato per fare curvare il veicolo, in ausilio all'angolo di sterzo  $d$  imposto dal pilota.

- A** Determinare una rappresentazione in forma di stato del sistema, considerando come ingressi l'angolo di sterzo  $d$  e il momento di imbardata  $M$ , e come uscita la velocità di imbardata  $r$ .
- B** Si determinino in forma letterale le funzioni di trasferimento che legano l'uscita  $r$  ai due ingressi  $d$  e  $M$  rispettivamente.
- C** Si descriva l'effetto a regime sulla velocità di imbardata  $r$  di un angolo di sterzo a gradino  $d(t) = \bar{d}H(t)$  e di un angolo di sterzo sinusoidale  $d(t) = \bar{d}\cos(t)$ , quando sia  $M = 0$ .
- D** Si consideri il progetto di un controllore in retroazione che utilizzi la misura della velocità di imbardata  $r$  e il controllo del momento  $M$  in modo da soddisfare le specifiche sotto riportate. Si descriva esplicitamente la procedura di progetto, commentando i passaggi effettuati durante le varie fasi; si riportino i diagrammi di Bode utilizzati e l'espressione analitica del controllore ricavato.
  - D1 Se l'angolo di sterzo viene mantenuto nullo, il controllore deve garantire, a regime, errori nulli nell'inseguimento di riferimenti di velocità di imbardata a gradino e a rampa.
  - D2 Sempre considerando  $d(t) = 0$ , il tempo di assestamento  $T_a$  deve essere inferiore a 5 secondi e la massima sovraelongazione inferiore al 10%.

D3 Sempre considerando  $d = 0$ , deve essere garantita un'attenuazione di un fattore  $10^5$  delle componenti del rumore di misura sulla velocità di imbardata  $r$  con frequenze pari o superiori a 150 Hz.

**Opzionale** Si consideri un sistema di ausilio alla guida 'drive by wire', in cui il momento  $M$  venga utilizzato per la stabilizzazione del comportamento in sterzata del veicolo. In tali sistemi, l'angolo di sterzo  $d$  impostato dal pilota, oltre ad agire direttamente sulla meccanica attraverso il modello sopra descritto, viene misurato ed interpretato (previa moltiplicazione per un opportuno fattore costante  $R$ , ad esempio  $R = \frac{a}{a+b}$ ) come riferimento della velocità di imbardata desiderata (vedi fig. 2). Si dimostri che, qualora il pilota applichi al veicolo un angolo di sterzo  $d(t)$  a gradino o a rampa, il controllore progettato ai punti precedenti garantisce errori nulli a regime, e si discutano le proprietà di questo controllore.

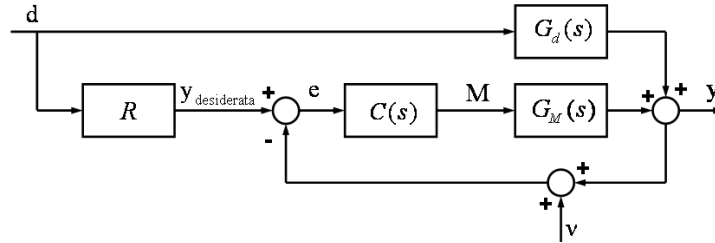


Figure 2: Schema semplificato di controllo di un sistema drive by wire.

## Soluzione

- A** Sostituendo le equazioni relative ai pneumatici ed agli angoli di deriva nel sistema di equazioni che descrive la dinamica, si ottiene la rappresentazione in forma di stato del sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du, \end{cases}$$

dove  $x = [v \ r]^T$ ,  $u = [d \ M]^T$  ed  $y = r$ . La matrice  $B$  può essere scomposta nei contributi dati dai due ingressi, ovvero  $B = [B_d \ B_M]$  dove  $B_d$  rappresenta il contributo relativo all'ingresso  $d$  e  $B_M$  quello relativo a  $M$ .

Le matrici corrispondenti risultano:

$$A = - \begin{bmatrix} \frac{C_1+C_2}{mu} & \frac{C_1a-C_2b}{mu} + u \\ \frac{C_1a-C_2b}{Ju} & \frac{C_1a^2+C_2b^2}{Ju} \end{bmatrix},$$

$$B_d = \begin{bmatrix} \frac{C_1}{m} \\ \frac{C_1a}{J} \end{bmatrix},$$

$$B_M = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix},$$

$$C = [0 \ 1],$$

$$D = 0.$$

- B** L-trasformando le equazioni del moto, si ottengono le seguenti funzioni di trasferimento tra l'uscita  $r$  e i due ingressi  $d$  e  $M$ :

$$G_d(s) = \frac{C_1 a m u^2 s + C_1 C_2 u (a+b)}{J u^2 m s^2 + (J u C_1 + J u C_2 + C_2 b^2 m u + C_1 a^2 m u) s + (a+b)^2 C_1 C_2 + (C_2 b - C_1 a) m u^2},$$

$$G_M(s) = \frac{m u^2 s + u (C_1 + C_2)}{J u^2 m s^2 + (J u C_1 + J u C_2 + C_2 b^2 m u + C_1 a^2 m u) s + (a+b)^2 C_1 C_2 + (C_2 b - C_1 a) m u^2}.$$

Nel caso  $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ , le espressioni analitiche delle due f.d.t. risultano essere:

$$G_d(s) = \frac{5.76 \cdot 10^{10} s + 5.2 \cdot 10^{11}}{8.064 \cdot 10^8 s^2 + 1.488 \cdot 10^{10} s + 7.72 \cdot 10^{10}},$$

$$G_M(s) = \frac{480000 s + 4 \cdot 10^6}{8.064 \cdot 10^8 s^2 + 1.488 \cdot 10^{10} s + 7.72 \cdot 10^{10}}.$$

I diagrammi di Bode delle funzioni di trasferimento  $G_d(s)$  e  $G_M(s)$  vengono riportati in fig. 3 e 4.

- C** Per determinare l'effetto a regime che un angolo di sterzo a gradino di ampiezza  $\bar{d}$  causa sull'uscita, considerando identicamente nullo il momento  $M(t)$  agente sull'asse posteriore basta applicare il teorema del valore finale:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s G_d(s) \frac{\bar{d}}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} G_d(s) \bar{d} = \frac{C_1 C_2 u (a+b)}{(a+b)^2 C_1 C_2 + m u^2 (C_2 b - C_1 a)} \bar{d} = 6.7358 \bar{d}.$$

Per determinare la risposta a regime corrispondente ad un ingresso  $d(t) = \bar{d} \cos(t)$  è sufficiente applicare il teorema fondamentale della risposta in frequenza alla funzione di trasferimento  $G_d(s)$ , dopo averne verificato l'asintotica stabilità. I poli di tale funzione risultano essere  $p_{1,2} = -9.2262 \pm 3.2575i$ ; viene quindi verificata la condizione di applicabilità. L'espressione risultante, considerando il fattore di amplificazione  $\bar{d}$  e la pulsazione  $\bar{\omega} = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  è quindi:

$$y_r(t) = \bar{d} |G_d(j\bar{\omega})| \cos(\bar{\omega} t + \arg(G_d(j\bar{\omega}))) = 6.7222 \bar{d} \cos(t - 0.0821).$$

- D** Lo schema di controllo da realizzare è riportato in fig. 5. Poiché il sistema da controllare  $G_M(s)$  è asintoticamente stabile in anello aperto, è possibile procedere al progetto del controllore direttamente in base ai diagrammi di Bode della f.d.t. di anello  $C(s)G_M(s)$ . Si faccia quindi riferimento ad un controllore del tipo  $C(s) = \frac{K}{s^t} C_0(s)$ , con  $C_0(0) = 1$ .

- D1) La funzione di trasferimento  $G_M(s)$  non ha poli nell'origine. Quindi per avere, a regime, errore nullo nell'inseguimento di riferimenti a gradino ed a rampa, è necessario che il controllore abbia due poli nell'origine. Il tipo  $t$  del controllore risulta quindi  $t = 2$ . I diagrammi di Bode della funzione di trasferimento di anello  $C(s)G_M(s)$ , con  $C(s) = \frac{1}{s^2}$ , vengono riportati in fig. 6.
- D2) Poiché la massima sovraelongazione ammissibile nella risposta al gradino è del 10%, è possibile approssimare il sistema in anello chiuso ad un sistema del secondo ordine (approssimazione a due poli dominanti). Per un sistema del secondo ordine, la relazione che lega la sovraelongazione allo smorzamento dei poli è  $S = e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$ . Nota la massima sovraelongazione ammissibile, è possibile ricavare lo smorzamento minimo  $\bar{\delta}$ ; nel caso specifico, si trova  $\bar{\delta} = 0.5912$ . Il minimo margine di fase ammissibile vale quindi  $\bar{M}_f \simeq 60$  gradi. Per soddisfare la specifica sul tempo di assestamento, è necessario a questo punto utilizzare la relazione  $\omega_T \geq \frac{3}{T_a\bar{\delta}} = 1.015 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ . Il diagramma dell'ampiezza della funzione di trasferimento  $C(s)G_M(s)$  deve quindi attraversare l'asse a zero  $db$  per pulsazioni maggiori di  $1.015 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ . Dai diagrammi di Bode riportati in fig. 6, si deduce che, per soddisfare queste specifiche, è necessario inserire uno o più zeri a bassa frequenza e alzare il guadagno della f.d.t. di anello  $C(s)G_M(s)$ . Inserendo, ad esempio, uno zero in  $-0.4$  e alzando il guadagno a 40000, si ottiene un margine di fase di 63.9 gradi e una pulsazione di taglio di  $4.99 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ . I diagrammi di Bode della funzione di trasferimento di anello  $C(s)G_M(s)$  relativi al controllore  $C(s) = 40000 \frac{2.5s+1}{s^2}$  vengono riportati in fig. 7.
- D3) La funzione di trasferimento tra l'uscita  $y$  e il rumore di misura  $\nu$  è:

$$Y(s) = -\frac{C(s)G_M(s)}{1 + C(s)G_M(s)}\nu(s).$$

Per soddisfare la specifica di reiezione del disturbo di misura, è necessario soddisfare la relazione:

$$\left| \frac{C(j\omega)G_M(j\omega)}{1 + C(j\omega)G_M(j\omega)} \right| < \frac{1}{10^5} = -100db.$$

Poiché nel campo di frequenze di interesse vale  $|C(j\omega)G_M(j\omega)| \ll 1$ , la relazione da soddisfare risulta, in prima approssimazione:

$$|C(j\omega)G_M(j\omega)|_{db} < -100db,$$

per  $\omega > 1000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ . Questa specifica può essere verificata inserendo un polo in alta frequenza, ad esempio in  $-100$ . I diagrammi di Bode della funzione di trasferimento di anello  $C(s)G_M(s)$ , con  $C(s) = 40000 \frac{2.5s+1}{s^2(0.01s+1)}$ , vengono riportati in fig. 8. La risposta al gradino del sistema chiuso in retroazione è riportata in fig. 9.

**Opzionale** Lo schema di controllo di riferimento del sistema drive by wire è riportato in fig. 2. La funzione di trasferimento tra l'angolo di sterzo  $d$  e la velocità di imbardata  $y = r$  è la seguente:

$$Y(s) = \frac{G_d(s) + C(s)G_M(s)R}{1 + C(s)G_M(s)}D(s).$$

Nel caso peggiore, ovvero  $d(t)$  a rampa, il valore a regime dell'errore  $e(t) = y_{rif}(t) - y(t) = Rd(t) - y(t)$  vale:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( R - \frac{G_d(s) + C(s)G_M(s)R}{1 + C(s)G_M(s)} \right) D(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{R - G_d(s)}{1 + C(s)G_M(s)} \frac{1}{s^2} = 0.$$

Si è così dimostrato quanto richiesto.

Mentre il controllo proposto nel punto **D** realizza la sterzata del veicolo per mezzo del solo momento di imbardata  $M$ , in questo caso la sterzata avviene prevalentemente ad opera del pilota, che comanda il sistema di sterzo; il momento  $M$  si limita ad aiutare il sistema di sterzo ad inseguire il valore desiderato di velocità di imbardata. In fig. 10 e 11 vengono riportati le velocità di imbardata  $r$  e i momenti  $M$  ottenuti eccitando con un gradino i due sistemi di fig. 5 e 2. Si noti come, nel caso in cui si utilizzi il sistema drive by wire di fig. 2, il valore desiderato di velocità di imbardata sia raggiunto in un tempo minore; in questo caso, infatti, i due effetti di  $d$  e  $M$  si aiutano a vicenda. Inoltre, utilizzando il sistema drive by wire di fig. 2, il momento  $M$  necessario ad inseguire il riferimento è molto inferiore rispetto al caso in cui  $M$  agisca da solo.

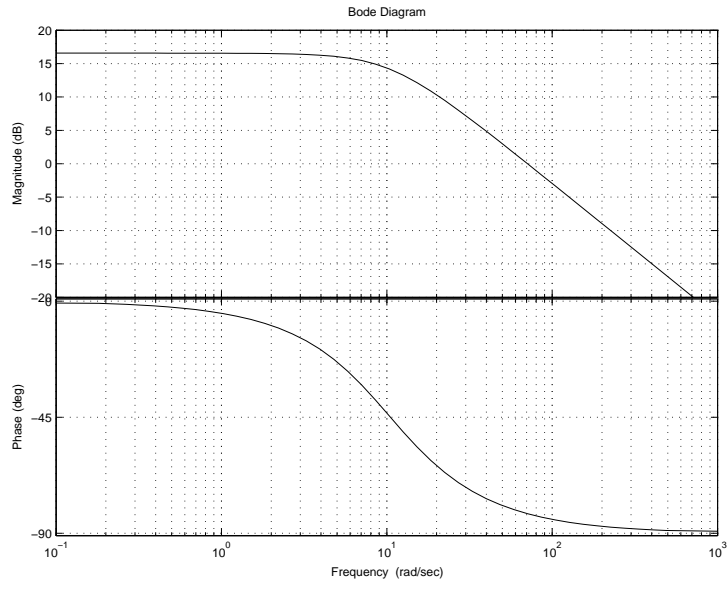


Figure 3: Diagrammi di Bode della funzione di trasferimento  $G_d(s)$ .

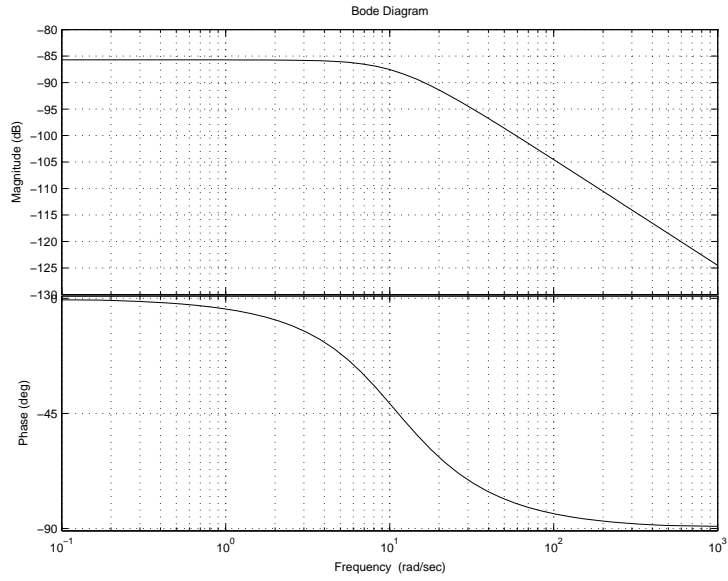


Figure 4: Diagrammi di Bode della funzione di trasferimento  $G_M(s)$ .

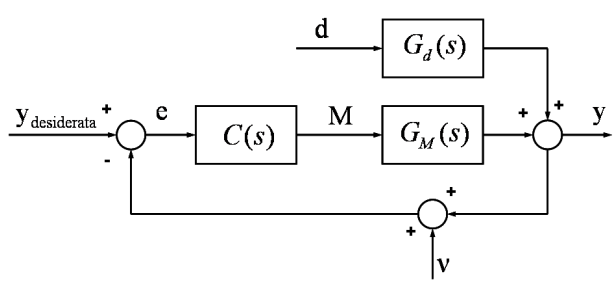


Figure 5: Schema del sistema di controllo da realizzare.

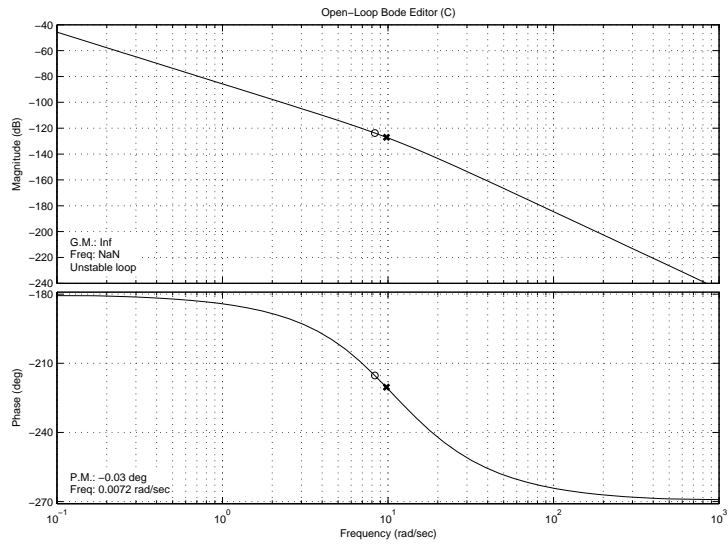


Figure 6: Diagrammi di Bode della funzione di trasferimento di anello  $C(s)G_M(s)$ , con  $C(s) = \frac{1}{s^2}$ .

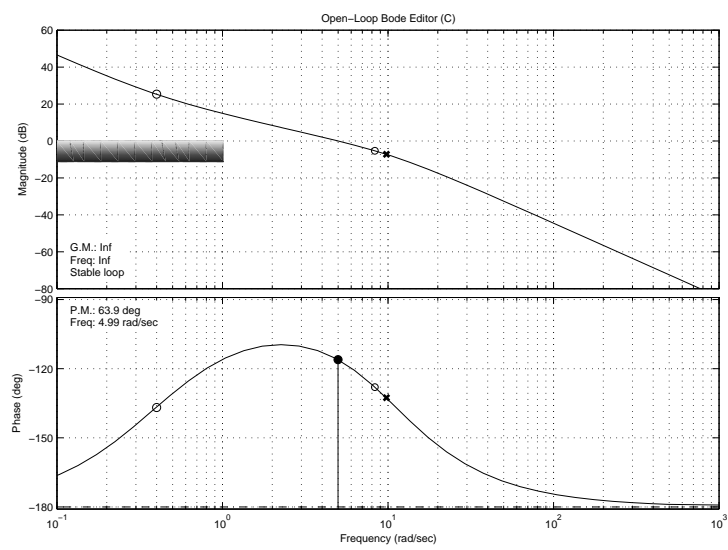


Figure 7: Diagrammi di Bode della funzione di trasferimento di anello  $C(s)G_M(s)$ , con  $C(s) = 40000 \frac{2.5s+1}{s^2}$ .

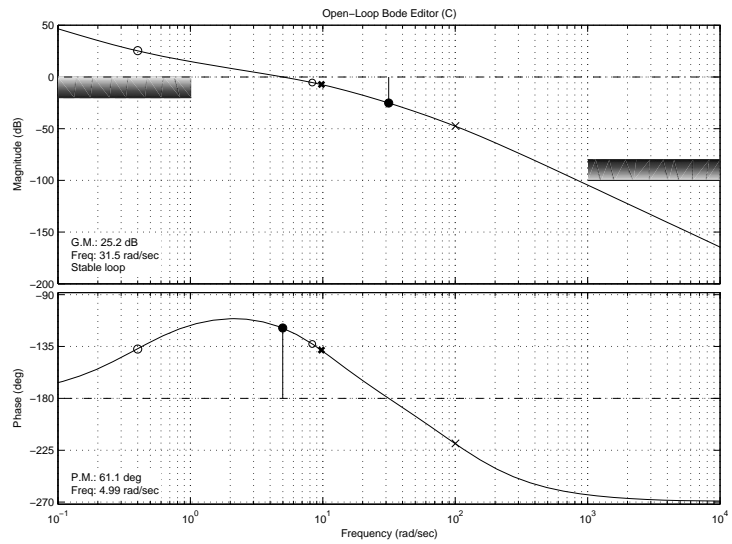


Figure 8: Diagrammi di Bode della funzione di trasferimento di anello  $C(s)G_M(s)$ , con  $C(s) = 40000 \frac{2.5s+1}{s^2(0.01s+1)}$ .

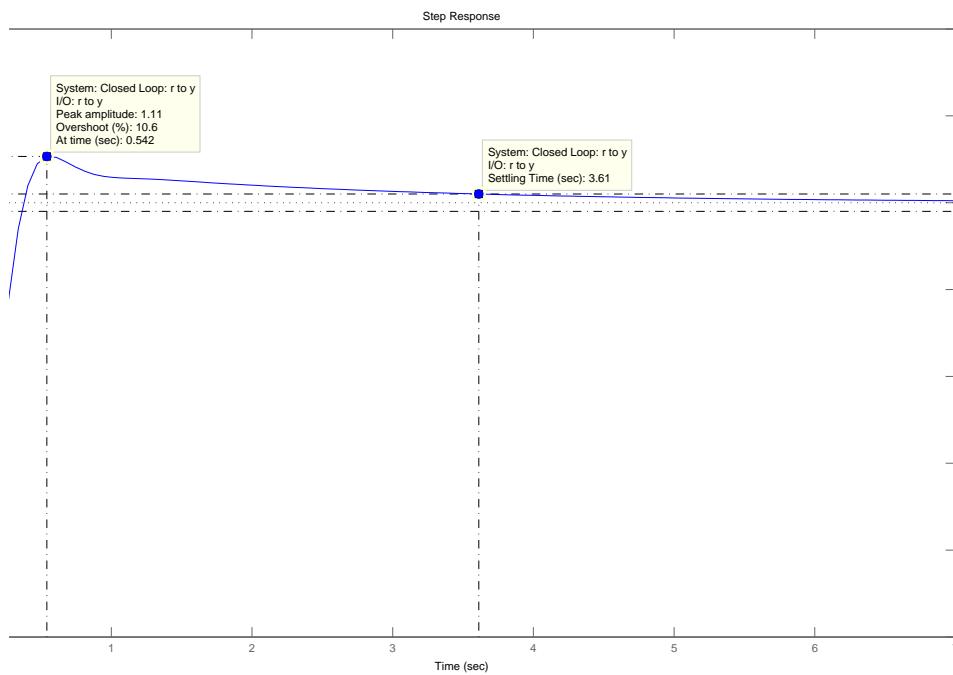


Figure 9: Risposta al gradino del sistema in retroazione.

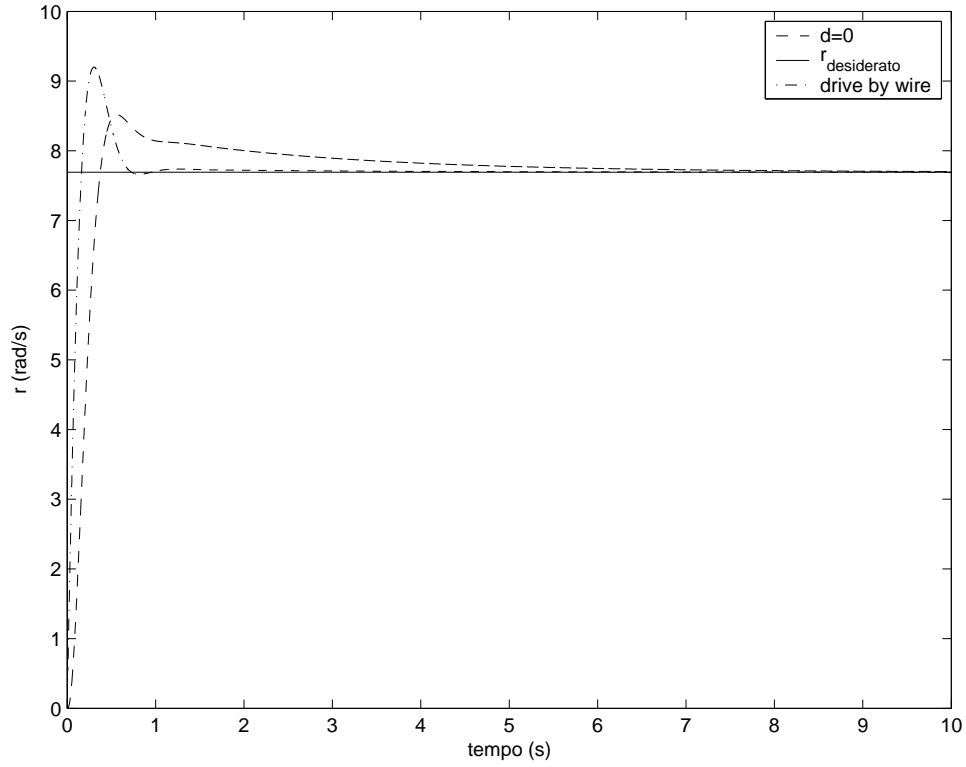


Figure 10: Risposta al gradino per i due schemi di controllo di fig. 5 e fig. 2.

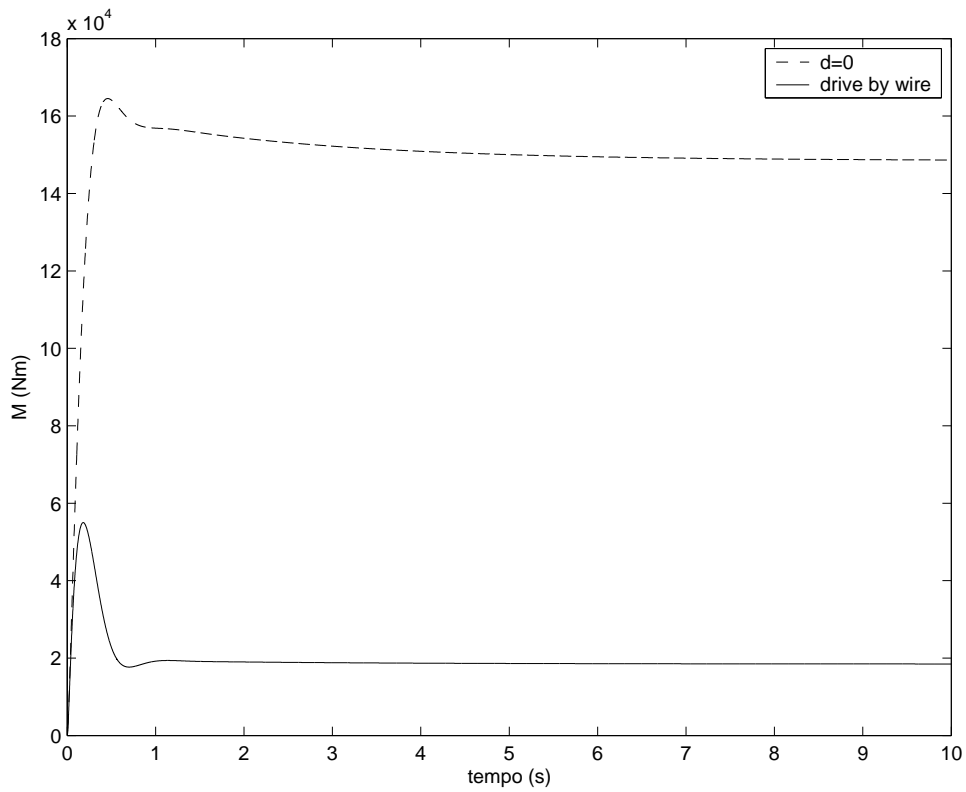


Figure 11: Momento  $M$  per i due schemi di controllo di fig. 5 e fig. 2.