

Esercizio 1 Si consideri la serie composta da un attuatore ed un sistema meccanico (figura 1).

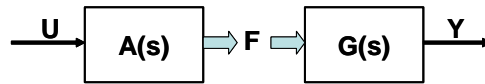


Figura 1: Connessione serie tra attuatore e sistema meccanico.

Entrambe le caratteristiche dinamiche dei sistemi in serie sono lineari e descritte dalle seguenti funzioni di trasferimento:

$$G(s) = \frac{\tau_g s + 1}{p_{g1} s^2 + p_{g2} s + 1} = \frac{Y(s)}{F(s)}$$

$$A(s) = \frac{\tau_a s + 1}{p_a s + 1} = \frac{F(s)}{U(s)}$$

A Si determini la rappresentazione in forma canonica di controllo di entrambe i sistemi;

B Si considerino adesso i seguenti valori numerici $p_a = 10$, $\tau_g = 20$, $\tau_b = -1/2$, $\tau_a = 2$:

B1 Si progetti un regolatore in grado di stabilizzare la serie attuatore–sistema nel caso in cui $p_{g1} = \tau_b \tau_a$ e $p_{g2} = \tau_b + \tau_a$;

B2 Si progettino due ulteriori regolatori in grado di stabilizzare la serie qualora si abbiano rispettivamente: **B2.1**) $p_{g1} = \tau_b(\tau_a + 10^{-3})$, $p_{g2} = \tau_b + \tau_a + 10^{-3}$, e **B2.2**) $p_{g1} = \tau_b(\tau_a + 1)$, $p_{g2} = \tau_b + \tau_a + 1$;

B3 Si dia una interpretazione dei risultati simulativi ottenuti per i tre regolatori progettati ai punti B1 e B2.

Esercizio 2 Sia data la curva $C(x, y) = x^6 + x^3 y + y^2 - 2 = 0$. Si consideri il sistema

$$\dot{x} = -C_y - C_x C_x = -(x^3 + 2y) - (x^6 + x^3 y + y^2 - 2)(6x^5 + 3x^2 y)$$

$$\dot{y} = C_x - C C_y = 6x^5 + 3x^2 y - (x^6 + x^3 y + y^2 - 2)(x^3 + 2y)$$

dove $C_z = \frac{\partial C(z)}{\partial z}$.

C Si verifichi che l'origine è punto di equilibrio per il sistema e se ne studi la stabilità.

D Si dimostri che il luogo $C(x, y) = 0$ è un ciclo limite per il sistema e in questo caso se ne valuti l'attrattività.

Soluzione

Esercizio 1.

A) La forma canonica di controllo del sistema meccanico è

$$A_g = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{p_{g1}} & -\frac{p_{g2}}{p_{g1}} \end{bmatrix}, B_g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C_g = \begin{bmatrix} \frac{1}{p_{g1}} & \frac{\tau_g}{p_{g1}} \end{bmatrix}, D_g = 0$$

mentre per l'attuatore (proprio ma non strettamente)

$$A_a = -\frac{1}{p_a}, B_a = 1, C_a = \frac{p_a - \tau_a}{p_a^2}, D_a = \frac{\tau_a}{p_a}$$

B) Si indichi con $\mathbf{x}_g = [x_1, x_2]^T$ il vettore di stato del sistema meccanico, e con $\mathbf{x}_a = x_3$ lo stato relativo all'attuatore, in modo da poter scrivere la dinamica di ciascun sistema come

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_g = A_g \mathbf{x}_g + B_g u_g \\ y_g = C_g \mathbf{x}_g + D_g u_g \end{cases}, \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_a = A_a \mathbf{x}_a + B_a u_a \\ y_a = C_a \mathbf{x}_a + D_a u_a \end{cases}$$

Notando che nel montaggio serie $y_a = u_g$ ed indicando con $u = u_a$ l'ingresso della serie e con $y = y_g$ l'uscita, è possibile ottenere la forma di stato complessiva

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_g \\ \dot{\mathbf{x}}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_g & B_g C_a \\ 0 & A_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_g \\ \mathbf{x}_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_g D_a \\ B_a \end{bmatrix} u \\ y = [C_g \quad D_g C_a] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_g \\ \mathbf{x}_a \end{bmatrix} + D_g D_a u \end{cases}$$

che esplicitata diventa

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{p_{g1}} & -\frac{p_{g2}}{p_{g1}} & \frac{p_a - \tau_a}{p_a^2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{p_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\tau_a}{p_a} \\ 1 \end{bmatrix} u = A\mathbf{x} + Bu \\ y = \begin{bmatrix} \frac{1}{p_{g1}} & \frac{\tau_g}{p_{g1}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = C\mathbf{x} \end{cases} \quad (1)$$

B1) Il sistema dato dalla serie di attuatore più carico meccanico è complessivamente instabile. I poli relativi alla serie sono infatti $-1/\tau_a$, $-1/\tau_b$ e $-1/p_a$, con $\tau_b < 0$.

Nella connessione in serie dei due sistemi, si può notare come il polo stabile del sistema meccanico $-1/\tau_a$ si cancelli con lo zero relativo all'attuatore:

$$\begin{aligned} A(s)G(s) &= \frac{(\tau_a s + 1)(\tau_g s + 1)}{(p_{g1} s^2 + p_{g2} s + 1)(p_a s + 1)} = \frac{(\tau_a s + 1)(\tau_g s + 1)}{(\tau_a s + 1)(\tau_b s + 1)(p_a s + 1)} \\ &= \frac{\tau_g s + 1}{(\tau_b s + 1)(p_a s + 1)} = \frac{Y(s)}{U(s)} \end{aligned}$$

Tale cancellazione implica la perdita di raggiungibilità per il modo associato (cancellazione zero-polo in serie), come è verificabile studiando la matrice di raggiungibilità del sistema complessivo (1) (il cui rango è infatti pari a due). L'osservabilità è invece conservata. Il regolatore deve essere progettato sul sottosistema raggiungibile ed osservabile, che si può ottenere direttamente per realizzazione minima della f.d.t. dopo la cancellazione.

Alternativamente, nel caso che la cancellazione zero-polo causata dalla connessione non fosse risultata evidente (cosa possibile, in particolare per sistemi più complessi di quelli qui studiati), si sarebbe potuto procedere interamente nello spazio di stato originale a tre dimensioni. Tentando la costruzione di un regolatore per questo sistema, se ne verificherebbe l'impossibilità proprio a causa della singolarità della matrice di raggiungibilità. Si può procedere quindi a porre il sistema (1) in forma standard di Kalman, e a progettare poi il regolatore sul sottosistema raggiungibile e osservabile.

Per ottenere la forma standard è necessario trovare una base del sottospazio raggiungibile e completarla per ottenere una base dello spazio completo \mathbb{R}^3 (tre variabili di stato complessive). Il rango della matrice di raggiungibilità è pari a due, quindi prelevando le prime due colonne di detta matrice (B e AB , base del

sottospazio raggiungibile) e giustappoendo il vettore $[001]^T$ (base complementare), si ottiene la matrice di trasformazione per la forma standard di raggiungibilità $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0.2 & 0.4 \\ 1 & 1.9 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 \end{array} \right], \hat{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{C} = CT = [-4 \quad -7.8 \mid 0], \hat{D} = 0$$

A questo punto è possibile costruire il regolatore sul sottosistema completamente raggiungibile ed osservabile (A_r, B_r, C_r, D_r) . Per la determinazione delle matrici di retroazione degli stati K e di iniezione delle uscite L , in grado di allocare gli autovalori in anello chiuso in p e quelli dell'osservatore in q , si può procedere come di consueto.

In particolare, illustriamo qui l'uso di una tecnica di piazzamento ottima LQR (che è studiata nella seconda parte del corso). La funzione di Matlab $[K, s, p] = \text{lqry}(\text{sys}, Q, R)$ fornisce direttamente la retroazione K , e la corrispondente posizione degli autovalori in anello chiuso p , che rende asintoticamente stabile il sistema sys minimizzando un funzionale di costo

$$J = \int y'Qy + u'Ru dt,$$

dove, come di consueto, si indica con y l'uscita del sistema e con u il corrispondente ingresso. Nel nostro caso, il sistema è SISO, quindi Q ed R , che sono in generale matrici di peso, sono due scalari. La scelta $Q = 1$, $R = 10$ pesa in modo maggiore la spesa per il controllo rispetto all'uscita: si ottiene così un sistema con controlli di limitata autorità ma convergenza piuttosto lenta. Il risultato ottenuto con questa scelta è un vettore $K = [4.3555, 8.6852]$ che piazza i poli di $A - BK$ in $p = [-2.3669, -0.0886]$.

Per quanto riguarda l'osservatore, l'analogo della scelta ottima LQR è il progetto ottimo di un osservatore di Luenberger, cioè un filtro di Kalman. Ponendo qui invece, per semplicità, $q = 2p$, il valore della matrice L di iniezione delle uscite sugli stati che pone gli autovalori di $A - LC$ in q , calcolato mediante il comando $L = \text{transpose}(\text{acker}(A_r', C_r', q))$, è dato da $L = [1.6194, -1.7036]^T$. Il compensatore basato sul regolatore appena progettato si costruisce col comando $\text{rsys} = \text{reg}(\text{sys}, K, L)$.

B2) Si può notare come in entrambe i casi non vi siano cancellazioni esatte nella connessione: si vince perciò che i sistemi complessivi per B2.1) e B2.2) saranno completamente raggiungibili ed osservabili. Il progetto del regolatore quindi può seguire le procedure standard nello spazio di stato originale.

È però da notarsi che il caso B2.1) differisce da quello studiato al punto precedente B1) di molto poco - per perturbazioni dei suoi termini di tre ordini di grandezza inferiori: in questo caso, siamo di fronte ad una cancellazione imperfetta, ma che sarebbe, in una realizzazione pratica, sostanzialmente indistinguibile da una cancellazione perfetta quale quella nel quesito B1). Il sistema B2.2), che appare avere la stessa caratteristica di raggiungibilità di B2.1), è invece ai fini pratici dissimile da B2.2) quasi quanto dal sistema con cancellazione esatta B1).

È opportuno chiedersi come queste osservazioni apparentemente discordanti si riconcilino. Ciò che in effetti si evidenzia con questi esempi è che le proprietà strutturali dei sistemi (in particolare, qui, la raggiungibilità) debbono essere talvolta considerate in termini quantitativi piuttosto che solo qualitativi: ovvero, "quanto" raggiungibile sia un sistema, non solo "se" lo sia o meno.

È da aspettarsi che, se nel caso B1) (considerato nello spazio di stato originale a tre dimensioni) la matrice di raggiungibilità è singolare, nel caso B2.1) essa risulterà molto vicina alla singolarità, mentre nel caso B2.2) ne sarà lontana. Un criterio corretto per evidenziare la "distanza" dalla perdita di rango di una matrice è il suo più piccolo valore singolare $\underline{\sigma}$: nei tre casi B1, B2.1 e B2.2, si trova rispettivamente $\underline{\sigma} = 0$, $\underline{\sigma} = 2.31 \cdot 10^{-5}$, e $\underline{\sigma} = 0.014377$.

La maggiore o minore raggiungibilità di un sistema si riflette, attraverso l'algoritmo di calcolo per il piazzamento dei poli, in diverse matrici di retroazione K .

Si ipotizzi infatti di piazzare i poli in $p = [-2.3669, -0.0886, -5]$ per i sistemi B2.1 e B2.2:

Nel caso B2.1 la matrice di retroazione statica degli stati $K = 10^4[0.3075, -0.1540, -6.9149]$, mentre nel secondo caso $K = [5.9014, -6.6388, -98.6790]$, ben tre ordini di grandezza inferiore. Si ricordi che la matrice di retroazione nel caso B1 (in cui non si tenta di spostare l'autovalore irraggiungibile) era $K = [4.3555, 8.6852]$, dello stesso ordine di grandezza di B2.2.

Ovviamente, elevati valori della matrice K implicano l'uso di elevati segnali di controllo: figuratamente, si può descrivere quanto evidenziato immaginando che gli autovalori poco raggiungibili, corrispondenti ai poli quasi cancellati, abbiano elevata inerzia allo spostamento, e richiedano perciò elevata autorità del controllo, che diventa infinita quando si ha completa perdita di raggiungibilità ($\underline{\sigma} = 0$).

I vettori di iniezione delle uscite sono praticamente identici nei due casi e pari a $L = [120.34, 16.31, 3.54]^T$. In effetti, le proprietà di osservabilità dei tre sistemi sono molto simili. Effetti analoghi e duali sulla matrice di iniezione L si sarebbero ottenuti se una quasi cancellazione avesse reso scarsamente osservabile il

sistema.

È doveroso notare infine che, se per gli stessi sistemi si fossero scelte realizzazioni nello spazio di stato in coordinate diverse, ad esempio \mathbf{z} con $\mathbf{x} = T\mathbf{z}$, le relative matrici di raggiungibilità e osservabilità sarebbero state rispettivamente $R_z = T^{-1}R_x$, e $O_z = O_xT$. Il cambiamento di variabili T altera i valori singolari delle matrici, che quindi *non* sono proprietà strutturali dei sistemi: i valori quantitativi di raggiungibilità e di osservabilità dipendono dalle coordinate, a differenza della loro caratterizzazione qualitativa. È però possibile dimostrare che quanto può esser guadagnato in raggiungibilità con un cambiamento di coordinate, è perso in osservabilità, ottenendo alla fine simili risultati sul progetto del controllore. Si può affermare quindi che la debolezza della partecipazione di un modo al legame ingresso-uscita per un sistema è una caratteristica strutturale del sistema stesso, che è evidenziata nella sua funzione di trasferimento dalla presenza di quasi-cancellazioni.

B3) Il montaggio del regolatore sulla serie dei due sistemi è rappresentato graficamente in figura 2. Le risposte dei sistemi regolati, a partire da perturbazioni delle condizioni iniziali $\mathbf{x}_0 = [1/2, 1/2, 1/2]^T$,

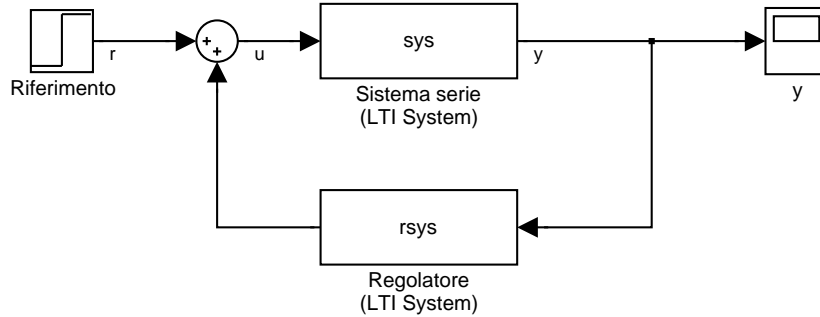


Figura 2: Schema del montaggio usato per la simulazione, che utilizza i blocchi LTI System del Control System Toolbox di Simulink)

sono riportate in figura 3. In figura 4 sono riportati i controlli corrispondenti. I grafici dei segnali di

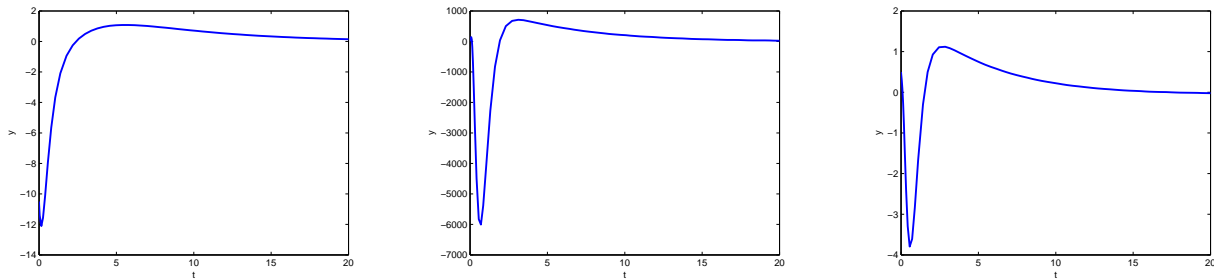


Figura 3: Risposte dei sistemi B1 (sinistra) B2.1 (centro) e B2.2 (destra).

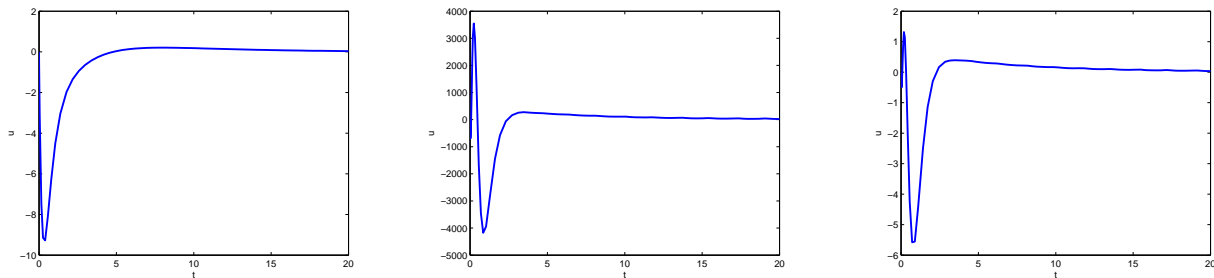


Figura 4: Segnali di controllo per i tre sistemi.

controllo confermano l'analisi fatta sulle matrici di retroazione degli stati, evidenziando la necessità di

una enorme autorità del controllo nel caso del sistema B2.1 debolmente controllabile.

Nel caso in cui la progettazione dei controllori di cui al punto B2 fosse stata fatta effettuata con la tecnica di controllo ottimo LQR ed utilizzando gli stessi pesi per il segnale d'ingresso e per l'uscita ($Q = 1, R = 10$), la posizione dei poli a ciclo chiuso nei casi B2.1 e B2.2 risulta essere rispettivamente $p = [-2.3665, -0.4998, -0.0886]$ e $p = [-2.1658, -0.3658, -0.0883]$. Si può notare che i due poli completamente raggiungibili nel caso B1 e B2.1 sono identici e che il polo debolmente controllabile nel caso B2.1 è lasciato praticamente invariato. Questa è una conseguenza dell'elevato costo assegnato al controllo relativamente alla prestazione: essendo lo spostamento dell'autovalore scarsamente raggiungibile molto costoso in termini di controllo e avendo esso poca influenza sulla uscita e quindi sulla prestazione, esso viene lasciato sostanzialmente inalterato.

Nel caso B2.2 tutti e tre i poli sono ricollocati. Le matrici di retroazione degli stati nei tre casi sono rispettivamente $K = [4.3555, 8.6852]$, $K = [-0.3930, -0.9163, 7.6668]$ e $K = [-0.5958, -1.3073, 7.7621]$. Tutte e tre sono dello stesso ordine di grandezza, la qual cosa fa intuire che la spesa per il controllo sarà anch'essa dello stesso ordine di grandezza nei tre casi (figura 5).

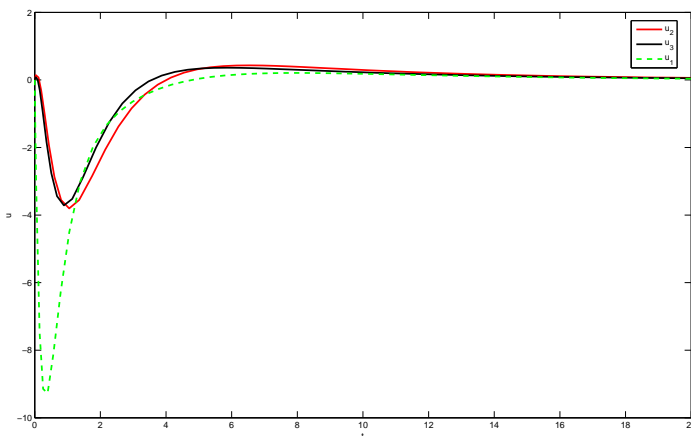


Figura 5: Confronto tra i segnali di controllo nel caso di progettazione ottima LQR con identici costi.

Esercizio 2)

C) Ponendo $x = 0$ e $y = 0$ nelle equazioni del sistema, si verifica facilmente che $\dot{x} = \dot{y} = 0$, dunque l'origine è punto di equilibrio. Per valutarne la stabilità è sufficiente applicare il metodo indiretto di Lyapunov. Il linearizzato nell'origine risulta infatti avere matrice dinamica

$$\left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \right|_{\mathbf{z}=\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},$$

dove con \mathbf{z} si è indicato il vettore $[x, y]^T$, i cui autovalori sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 4$. L'origine è quindi un punto di equilibrio instabile.

D) La derivata rispetto al tempo della curva $C(x, y) = 0$ compatibile con le equazioni del sistema è data da

$$\begin{aligned} \frac{dC(x, y)}{dt} &= C_x \dot{x} + C_y \dot{y} \\ &= C_x (-C_y - CC_x) + C_y (C_x - CC_y) \\ &= -C (C_x^2 + C_y^2) \end{aligned}$$

che risulta evidentemente nulla in tutti i punti della curva. Questo implica che l'equazione implicita $C(x, y) = 0$ definisce un insieme invariante per il sistema e dunque, trattandosi di una curva chiusa, un ciclo limite.

Per valutare l'attrattività del ciclo limite si può far uso della funzione $V(x, y) = \frac{1}{2}C(x, y)^2$. Essa è definita positiva ovunque eccetto che sulla curva $C(x, y) = 0$ ove si annulla. Si può utilizzare il teorema di

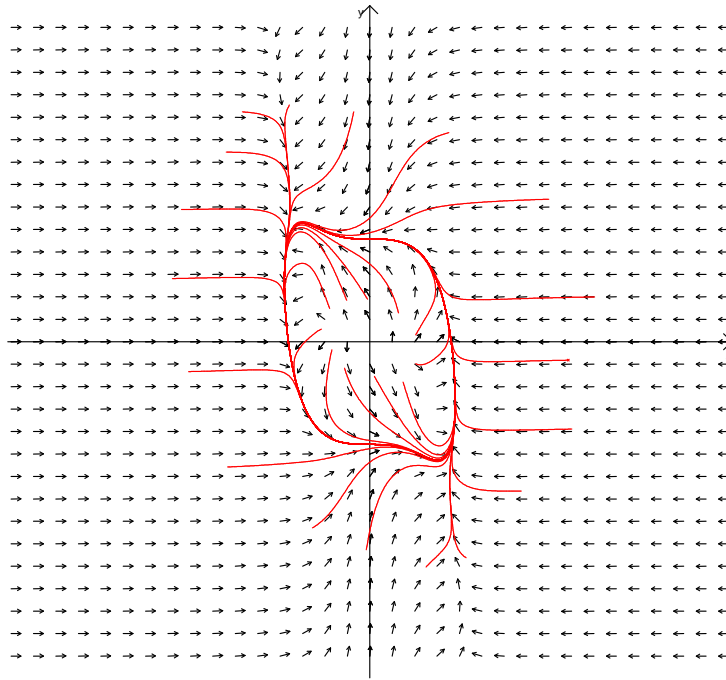


Figura 6: Illustrazione del ciclo limite nello spazio delle fasi

LaSalle nella sua forma più generale (con funzioni semidefinite) poiché le curve di livello di $V(x, y)$ sono chiuse. La derivata direzionale di tale funzione lungo le traiettorie del sistema si presenta come segue

$$\begin{aligned}
 L_{\mathbf{f}}V(x, y) &= C [C_x \dot{x} + C_y \dot{y}] \\
 &= C [C_x (-C_y - CC_x) + C_y (C_x - CC_y)] \\
 &= -C^2 [C_x^2 + C_y^2].
 \end{aligned}$$

Da quest'ultima relazione e dalle equazioni del sistema si deduce che l'insieme in cui la $\frac{dV(x,y)}{dt}$ è nulla è dato dalla curva $C(x, y) = 0$ e dall'origine. Per il teorema di LaSalle possiamo concludere che il ciclo limite risulta essere attrattivo. È da notare che l'origine è punto di equilibrio instabile ma non divergente, infatti le traiettorie che partono da un intorno dell'origine si allontanano da essa, ma finiscono confinate nel ciclo limite. I risultati della precedente analisi risultano evidenti dalla rappresentazione nello spazio delle fasi di alcune traiettorie del sistema.