

**Esercitazione Scritta di Controlli Automatici — 23-7-2007**

Il controllo delle emissioni di ossido di azoto ( $\text{NO}_x$ ) da parte di motori diesel di grosse dimensioni può essere realizzato mediante un dispositivo catalitico basato sul processo urea-SCR (selective catalytic reduction using urea). Il seguente modello, a parametri concentrati, descrive il processo SCR basandosi sulle quattro reazioni fondamentali che descrivono la catalisi dell'ammoniaca ( $\text{NH}_3$ ),

$$\begin{aligned}\dot{C}_{\text{NO}} &= -C_{\text{NO}} \left( \Theta_{\text{SC}} R_{\text{red}} \theta + \frac{F}{V_{\text{cat}}} \right) + R_{\text{ox}} \Theta_{\text{SC}} \theta + \frac{F}{V_{\text{cat}}} d \\ \dot{\theta} &= -\theta (R_{\text{ads}} C_{\text{NH}_3} + R_{\text{des}} + R_{\text{red}} C_{\text{NO}} + R_{\text{ox}}) + R_{\text{ads}} C_{\text{NH}_3} \\ \dot{C}_{\text{NH}_3} &= -C_{\text{NH}_3} \left( \Theta_{\text{SC}} R_{\text{ads}} (1 - \theta) + \frac{F}{V_{\text{cat}}} \right) + \Theta_{\text{SC}} R_{\text{des}} \theta + \frac{F}{V_{\text{cat}}} u,\end{aligned}$$

dove  $C_{\text{NO}}$  (espressa in  $\text{mol}/\text{m}^3$ ) rappresenta la concentrazione di NO gassoso,  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq 1$  adimensionale) rappresenta la frazione di copertura di superficie dovuta all'ammoniaca adsorbita e  $C_{\text{NH}_3}$  (espressa in  $\text{mol}/\text{m}^3$ ) la concentrazione di ammoniaca. Inoltre  $d$  è un disturbo esterno corrispondente alla concentrazione in ingresso di NO e  $u$  è l'ingresso di controllo del sistema corrispondente alla concentrazione in ingresso di  $\text{NH}_3$ . I restanti parametri sono riportati nella tabella seguente.

NOME	SIMBOLO	VALORE	UNITÀ
Capacità tot. di immagazz. di $\text{NH}_3$	$\Theta_{\text{SC}}$	$5 \cdot 10^3$	$\text{mol}/\text{m}^3$
Rapp. velocità di flusso - vol. di catalisi	$\frac{F}{V_{\text{cat}}}$	1	1/s
Velocità di reazione per riduzione	$R_{\text{red}}$	51.7	$\text{m}^3/(\text{mol s})$
Velocità di reazione per ossidazione	$R_{\text{ox}}$	$3.88 \cdot 10^{-6}$	1/s
Velocità di reazione per adsorbimento	$R_{\text{ads}}$	100	$\text{m}^3/(\text{mol s})$
Velocità di reazione per desorbimento	$R_{\text{des}}$	$4 \cdot 10^{-4}$	1/s

Parametri fisico-chimici del dispositivo di catalisi

- A** Si determini il punto di equilibrio del sistema e l'ingresso corrispondente in presenza di un disturbo costante  $d = \bar{d}$  e di una  $\theta = \bar{\theta}$  desiderata;
- B** Si determini il linearizzato attorno all'equilibrio calcolato nel punto **A**;
- C** Si studi la raggiungibilità e l'osservabilità del sistema supponendo di disporre della misura della concentrazione di NO ( $C_{\text{NO}}$ );
- D** Si progetti un compensatore basato sul regolatore che sia in grado di stabilizzare asintoticamente il sistema nell'equilibrio calcolato al punto **A** con elevata velocità di convergenza. A tal fine si consideri  $\bar{d} = 10 \text{ mol}/\text{m}^3$ ,  $\bar{\theta} = 0.45$  e si impieghino i valori numerici riportati in tabella;
- E** Si effettui una simulazione del sistema a ciclo chiuso ottenuto connettendo il controllore progettato al punto precedente con il modello non lineare del sistema.
- F** Si fornisca una stima delle condizioni iniziali a partire dalle quali il controllore progettato è capace di garantire la convergenza del sistema alla configurazione desiderata.

## Soluzione

**A** Imponendo le condizioni di equilibrio si ha:

$$\begin{aligned} 0 &= -C_{\text{NO}} \left( \Theta_{\text{SC}} R_{\text{red}} \bar{\theta} + \frac{F}{V_{\text{cat}}} \right) + R_{\text{ox}} \Theta_{\text{SC}} \bar{\theta} + \frac{F}{V_{\text{cat}}} \bar{d} \\ 0 &= -\bar{\theta} (R_{\text{ads}} C_{\text{NH}_3} + R_{\text{des}} + R_{\text{red}} C_{\text{NO}} + R_{\text{ox}}) + R_{\text{ads}} C_{\text{NH}_3} \\ 0 &= -C_{\text{NH}_3} \left( \Theta_{\text{SC}} R_{\text{ads}} (1 - \bar{\theta}) + \frac{F}{V_{\text{cat}}} \right) + \Theta_{\text{SC}} R_{\text{des}} \bar{\theta} + \frac{F}{V_{\text{cat}}} u, \end{aligned}$$

da cui si ottiene:

$$\begin{aligned} \theta &= \bar{\theta} \\ \bar{C}_{\text{NO}} &= \frac{\frac{F}{V_{\text{cat}}} \bar{d} + R_{\text{ox}} \Theta_{\text{SC}} \bar{\theta}}{\Theta_{\text{SC}} R_{\text{red}} \bar{\theta} + \frac{F}{V_{\text{cat}}}} \\ \bar{C}_{\text{NH}_3} &= \frac{\bar{\theta} (R_{\text{des}} + R_{\text{red}} \bar{C}_{\text{NO}} + R_{\text{ox}})}{R_{\text{ads}} (1 - \bar{\theta})} \\ \bar{u} &= \frac{V_{\text{cat}}}{F} \left( \bar{C}_{\text{NH}_3} \left( \Theta_{\text{SC}} R_{\text{ads}} (1 - \bar{\theta}) + \frac{F}{V_{\text{cat}}} \right) - \Theta_{\text{SC}} R_{\text{des}} \bar{\theta} \right). \end{aligned}$$

**B** Scriviamo il sistema rispetto a variabili di stato, controlli e disturbi traslati. Il vettore di stato diviene  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T = [C_{\text{NO}} - \bar{C}_{\text{NO}} \ \theta - \bar{\theta} \ C_{\text{NH}_3} - \bar{C}_{\text{NH}_3}]^T$ , il disturbo  $\tilde{d} = d - \bar{d}$  ed il controllo  $\tilde{u} = u - \bar{u}$ . Il sistema non lineare risultante è

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -(x_1 + \bar{C}_{\text{NO}}) \left( \Theta_{\text{SC}} R_{\text{red}} (x_2 + \bar{\theta}) + \frac{F}{V_{\text{cat}}} \right) + R_{\text{ox}} \Theta_{\text{SC}} (x_2 + \bar{\theta}) + \frac{F}{V_{\text{cat}}} (\tilde{d} + \bar{d}) \\ \dot{x}_2 &= -(x_2 + \bar{\theta}) (R_{\text{ads}} (x_3 + \bar{C}_{\text{NH}_3}) + R_{\text{des}} + R_{\text{red}} (x_1 + \bar{C}_{\text{NO}}) + R_{\text{ox}}) + R_{\text{ads}} (x_3 + \bar{C}_{\text{NH}_3}) \\ \dot{x}_3 &= -(x_3 + \bar{C}_{\text{NH}_3}) \left( \Theta_{\text{SC}} R_{\text{ads}} (1 - x_2 - \bar{\theta}) + \frac{F}{V_{\text{cat}}} \right) + \Theta_{\text{SC}} R_{\text{des}} (x_2 + \bar{\theta}) + \frac{F}{V_{\text{cat}}} (\tilde{u} + \bar{u}). \end{aligned}$$

Il sistema linearizzato assume la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + b_1 \tilde{u} + b_2 \tilde{d},$$

con matrici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{F}{V_{\text{cat}}} \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} \frac{F}{V_{\text{cat}}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

e coefficienti

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\Theta_{\text{SC}} R_{\text{red}} \bar{\theta} - \frac{F}{V_{\text{cat}}} \\ a_{12} &= -\Theta_{\text{SC}} R_{\text{red}} \bar{C}_{\text{NO}} + \Theta_{\text{SC}} R_{\text{ox}} \\ a_{21} &= -R_{\text{red}} \bar{\theta} \\ a_{22} &= -R_{\text{ads}} \bar{C}_{\text{NH}_3} - R_{\text{des}} - R_{\text{red}} \bar{C}_{\text{NO}} - R_{\text{ox}} \\ a_{23} &= R_{\text{ads}} (1 - \bar{\theta}) \\ a_{32} &= \Theta_{\text{SC}} R_{\text{ads}} \bar{C}_{\text{NH}_3} + \Theta_{\text{SC}} R_{\text{des}} \\ a_{33} &= -\Theta_{\text{SC}} R_{\text{ads}} (1 - \bar{\theta}) - \frac{F}{V_{\text{cat}}}. \end{aligned}$$

**C** Calcolando la matrice di raggiungibilità ( $R = [b_1 \quad Ab_1 \quad A^2 b_1]$ ) si ottiene

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{F}{V_{\text{cat}}} a_{12} a_{23} \\ 0 & \frac{F}{V_{\text{cat}}} a_{23} & \frac{F}{V_{\text{cat}}} a_{23} (a_{22} + a_{33}) \\ \frac{F}{V_{\text{cat}}} & \frac{F}{V_{\text{cat}}} a_{33} & \frac{F}{V_{\text{cat}}} (a_{23} a_{32} + a_{33}^2) \end{bmatrix},$$

che risulta avere  $\det A = -\left(\frac{F}{V_{act}}\right)^3 a_{12}a_{23}^2$ . Tale determinante è nullo se  $a_{12} = 0$  e/o  $a_{23} = 0$ . La prima condizione corrisponde ad avere  $R_{ox} = R_{red}\bar{C}_{NO}$ , mentre la seconda  $\bar{\theta} = 1$  (cioè piena copertura della superficie). Nel primo caso il rango della matrice di raggiungibilità risulta pari a 2 e lo stato non raggiungibile è  $C_{NO}$ , mentre nel secondo risulta pari a 1 e gli stati non raggiungibili sono  $C_{NO}$  e  $\theta$ .

Per ciò che concerne l'osservabilità del sistema dalla misura della concentrazione di NO, si ha:

$$C = [1 \quad 0 \quad 0]$$

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{11} & a_{12} & 0 \\ (a_{11}^2 + a_{12}a_{21}) & a_{12}(a_{11} + a_{22}) & a_{12}a_{23} \end{bmatrix}$$

$\det O = a_{12}^2 a_{23}$ . Il sistema perde quindi di osservabilità se  $a_{12} = 0$  e/o  $a_{23} = 0$ . Le condizioni sono le medesime della raggiungibilità, ma in questo caso se  $a_{12} = 0$  il rango della matrice di osservabilità risulta essere 1 e gli stati non osservabili sono  $\theta$  e  $C_{NH_3}$ , mentre se  $a_{23} = 0$  il rango è 2 e lo stato non osservabile è  $C_{NH_3}$ .

**D** Sostituendo i valori numerici riportati nella tabella e nel punto **D**, si ottiene il seguente equilibrio

$$\begin{aligned} \bar{\theta} &= 0.45 \\ \bar{C}_{NO} &= 8.604 \cdot 10^{-5} \\ \bar{C}_{NH_3} &= 3.97 \cdot 10^{-5} \\ \bar{u} &= 10.0174, \end{aligned}$$

e le seguenti matrici per il sistema linearizzato:

$$A = \begin{bmatrix} -116326 & -22.222 & 0 \\ -23.265 & -8.8221 \cdot 10^{-3} & 55 \\ 0 & 21.8498 & -275001 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori di  $A$  sono  $\lambda_1 = -1.1633 \cdot 10^5$ ,  $\lambda_2 = -7.8141 \cdot 10^{-6}$  e  $\lambda_3 = -2.75001 \cdot 10^5$ , quindi il sistema è asintoticamente stabile. Vogliamo però aumentare la velocità di convergenza del sistema. Con i valori dati risulta  $a_{12} \neq 0$  e  $a_{23} \neq 0$ , possiamo pertanto applicare la tecnica di progetto del regolatore nello spazio di stato.

Progettiamo una retroazione statica degli stati  $K$  in grado di allocare i poli del sistema a ciclo chiuso in  $p = [-10^4 \quad -10^5 \quad -3 \cdot 10^5]$ . Utilizzando la funzione di Matlab  $K = \text{place}(A, b_1, p)$  è possibile calcolare la matrice dei guadagni  $K$ . Si ottiene:

$$K = [-2.6087 \cdot 10^{11} \quad -2.9441 \cdot 10^6 \quad 1.8673 \cdot 10^4].$$

Poiché non si ha accesso a tutte le variabili di stato ma il sistema risulta completamente osservabile dall'uscita  $C_{NO}$ , si può realizzare un osservatore di Luenberger per ricostruire lo stato. La matrice  $L$  di iniezione delle uscite è calcolata in modo che la matrice dinamica dello stimatore  $A - LC$  abbia autovalori  $q = 2p$ . Sempre impiegando il comando Matlab  $L = \text{transpose}(\text{place}(A', C', q))$  si ottiene:

$$L = \begin{bmatrix} 4.28673 \cdot 10^5 \\ 6.24392 \cdot 10^8 \\ -5.08563 \cdot 10^{12} \end{bmatrix}.$$

Il compensatore basato sul regolatore appena progettato ha dinamica  $K(sI - A + b_1K + LC)^{-1}L$  e si costruisce con il comando  $\text{rsys} = \text{ss}(A - b_1K - L * C, L, K, 0)$  ovvero, a meno di un segno, con  $\text{rsys} = \text{reg}(\text{sys}, K, L)$ , ove  $\text{sys} = \text{ss}(A, b_1, C, 0)$ .

Si nota come la presenza di valori numerici con scale molto diverse renda malcondizionata la matrice  $A$ . Come conseguenza, il piazzamento dei poli del sistema a ciclo chiuso e dell'osservatore non sarà esatto a causa di problemi numerici, come lo stesso Matlab segnala.

**E** Uno schema Simulink del sistema stabilizzato è riportato in figura 1.

Il blocco Simulink Urea-SCR contiene la seguente funzione:

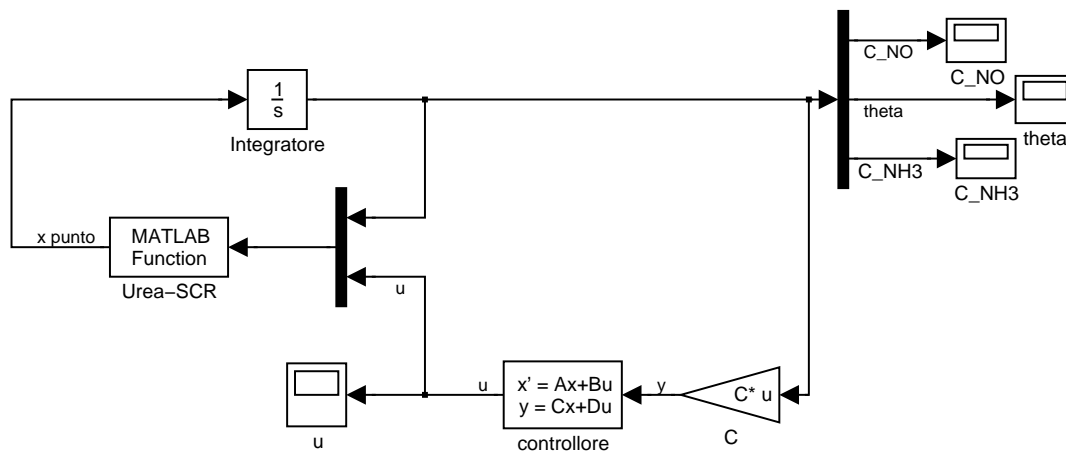


Figure 1: Schema Simulink del sistema stabilizzato con controllore lineare.

```
function out = SistemaNONLineare(in)

% Ingressi del blocco
x1 = in(1);
x2 = in(2);
x3 = in(3);
uu = in(4);

% Parametri del sistema
ParametriSistema;

% Equilibrio
theta_eq = .45;
d_eq = 10;
C_NO_eq = (F_Vcat*d_eq + Rox*ThetaSC*theta_eq)/(ThetaSC*Rred*theta_eq+F_Vcat);
C_NH3_eq = theta_eq*(Rdes+Rox+Rred*C_NO_eq)/(Rads*(1-theta_eq));
u_eq = inv(F_Vcat)*(C_NH3_eq*(ThetaSC*Rads*(1-theta_eq)+F_Vcat)-ThetaSC*Rdes*theta_eq);

% Traslazione
z1 = x1 + C_NO_eq;
z2 = x2 + theta_eq;
z3 = x3 + C_NH3_eq;
u = u_eq + uu;
d = d_eq;

% Dinamica del sistema
dot_x1 = -z1*(ThetaSC*Rred*z2+F_Vcat)+Rox*ThetaSC*z2+F_Vcat*d;
dot_x2 = -z2*(Rads*z3+Rdes+Rred*z1+Rox)+Rads*z3;
dot_x3 = -z3*(ThetaSC*Rads*(1-z2)+F_Vcat)+ThetaSC*Rdes*z2+F_Vcat*u;

% Uscite del blocco
out(1) = dot_x1;
out(2) = dot_x2;
out(3) = dot_x3;
```

dove lo *script* ParametriSistema contiene i valori numerici di tutti i parametri del sistema. Il blocco **controllore** contiene le matrici del regolatore precedentemente progettato.

Per valutare il controllore lineare consideriamo un valore iniziale di  $\theta$  pari a 0.35 e le altre variabili

di stato all'equilibrio. Le figure 2, 3 e 4 riportano l'andamento dello scostamento dal punto di equilibrio delle variabili  $C_{NO}$ ,  $\theta$  e  $C_{NH_3}$  rispettivamente.

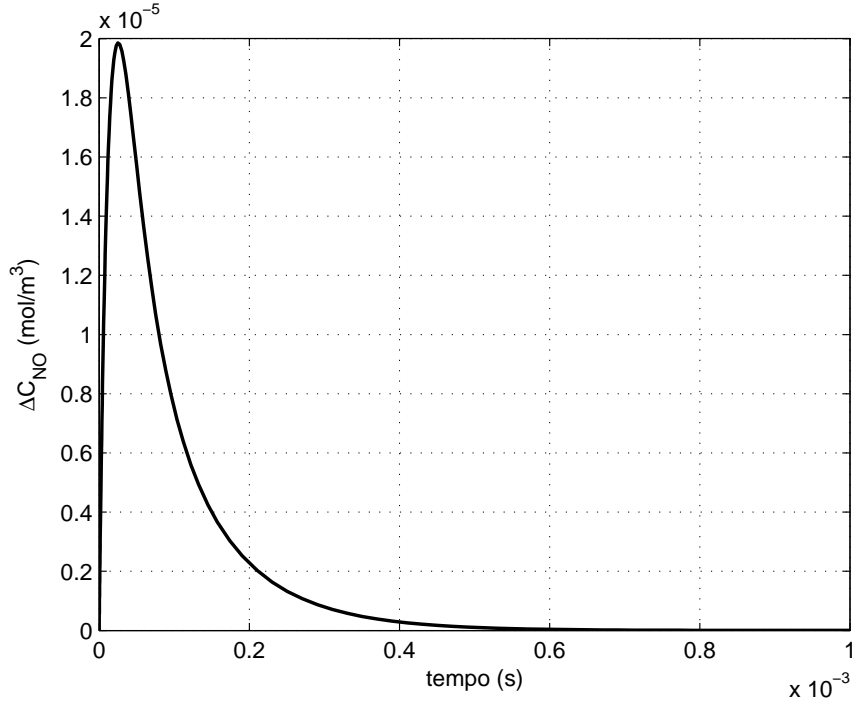


Figure 2: Andamento dello scostamento di  $C_{NO}$  rispetto al valore di equilibrio.

Nella figura 5, invece, è riportato l'andamento della concentrazione in ingresso di  $NH_3$  rispetto al suo valore di equilibrio, cioè della variabile di controllo  $\tilde{u}$ .

**F** Il sistema lineare a ciclo chiuso si può ottenere, per un montaggio del controllore in catena di retroazione, con il seguente comando Matlab `fsys = feedback(sys,rsys,+1)`, dove `sys = ss(A,b1,C,0)` sia il sistema ad anello aperto. La matrice dinamica  $A_f \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  di questo sistema (che si può ottenere con il comando `[Af,Bf,Cf,Df] = ssdata(fsys)`) avrà gli autovalori nelle locazioni scelte in precedenza (si veda il punto **D**). Per il sistema linearizzato, si può agevolmente trovare una funzione di Lyapunov del tipo  $V_Q = \mathbf{z}^T P_Q \mathbf{z}$ , con  $P_Q$  soluzione dell'equazione di Lyapunov  $A_f^T P_Q + P_Q A_f = -Q$  (ad esempio col comando `Pq = lyap(Af',Q)`), per qualche  $Q$  simmetrica positiva definita. Nelle precedenti relazioni si è indicato con  $\mathbf{z}$  il vettore complessivo del sistema a ciclo chiuso, cioè  $\mathbf{z} = [\mathbf{x}^T \quad \mathbf{x}_r^T]^T$ , ove  $\mathbf{x}_r$  è il vettore di stato del regolatore.

Per stimare (per difetto) la regione di asintotica stabilità del sistema non lineare stabilizzato, si deve quindi valutare la regione in cui vale la disequazione  $\dot{V}_Q = -\mathbf{z}^T Q \mathbf{z} + 2\mathbf{z}^T P_Q \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) < 0$  (ove  $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{z})$  sia la differenza tra il sistema a ciclo chiuso non lineare e il sistema a ciclo chiuso lineare) e trovare la più grande superficie di livello di  $V_Q$  interamente contenuta in quella regione. Per il sistema in esame la  $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{z})$  risulta essere:

$$\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}, K\mathbf{x}_r) - A\mathbf{x} - BK\mathbf{x}_r \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Theta_{SC} R_{red} x_1 x_2 + R_{ox} \Theta_{SC} \bar{\theta} - \bar{C}_{NO} \left( \Theta_{SC} R_{red} \bar{\theta} + \frac{F}{V_{cat}} \right) + \frac{F}{V_{cat}} \bar{d} \\ -x_2 (R_{ads} x_3 + R_{red} x_1) + R_{ads} \bar{C}_{NH_3} (1 - \theta) - \bar{\theta} (R_{des} + R_{red} \bar{C}_{NO} + R_{ox}) \\ \Theta_{SC} R_{ads} x_2 x_3 - \bar{C}_{NH_3} \left( \Theta_{SC} R_{ads} (1 - \theta) + \frac{F}{V_{cat}} \right) + \Theta_{SC} R_{des} \bar{\theta} + \frac{F}{V_{cat}} \bar{u} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix}.$$

La disequazione può essere studiata numericamente generando casualmente punti distribuiti sulla superficie di livello  $V_Q = R^2$  e guardando al segno di  $\dot{V}_Q$  al variare di  $R$ . Si può far uso, ad esempio, della seguente procedura di bisezione sul valore di  $R$ :

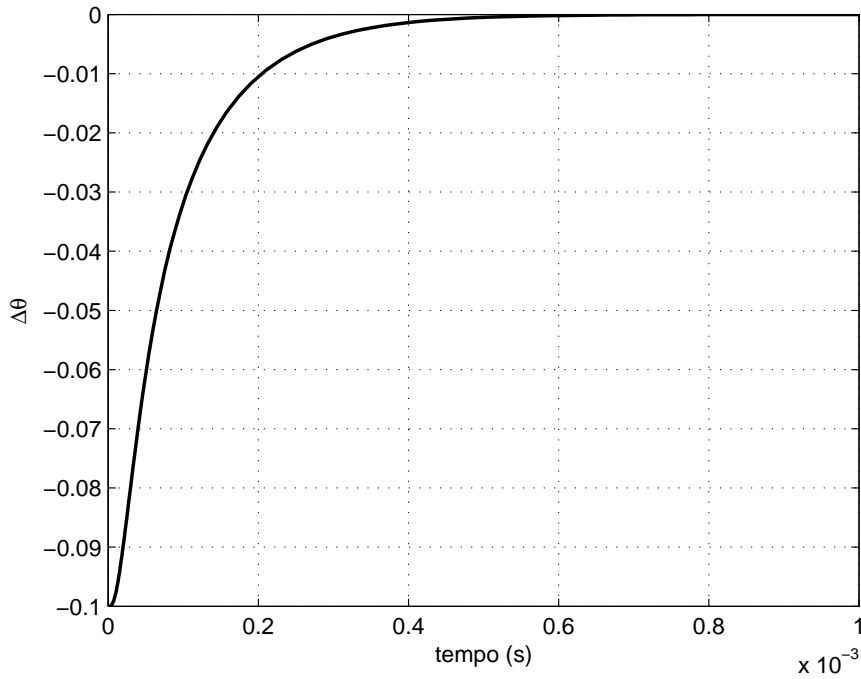


Figure 3: Andamento dello scostamento di  $\theta$  rispetto al valore di equilibrio.

```

Q = randn(m,m);
Q = (Q*Q')/2;

Pq = lyap(Af',Q);

R0 = 0.01;
tolR = 1e-7;
% 'raggio' della curva di livello
R = R0 + tolR;
R_max = Inf;
R_min = 0;

while R_max-R_min > tolR
    R
    ok = evalvdot(Pq,Q,R);
    if (ok == 1)
        R_min = R;
        if (R_max == Inf)
            R = R/2 + R;
        else
            R = R + (R_max - R)/2;
        end
    else
        R_max = R;
        R = R - (R - R_min)/2;
    end
end
end

```

Essa invoca, per ogni nuovo valore di  $R$ , la funzione `evalvdot()` che ha il compito di verificare il segno di  $\dot{V}_Q$  sui punti della superficie  $V_Q = R^2$ :

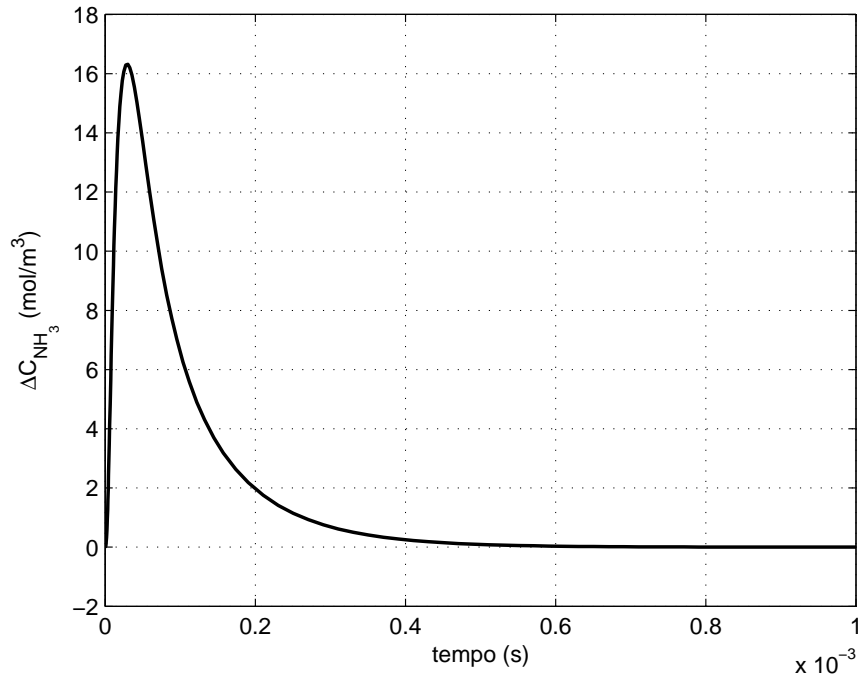


Figure 4: Andamento dello scostamento di  $C_{\text{NH}_3}$  rispetto al valore di equilibrio.

```
function ok = evalvdot(P,Q,R)

M = inv(sqrtm(P));
[m,n] = size(P);

ok = 1;
numtentativi = 50000;
i = 1;
% Numero di tentativi casuali
while ok & (i<=numtentativi)
    % Vettore di direzione random e lunghezza R
    x = randn(m,1);
    y = R*x/norm(x);
    % Punto random sulla curva di livello
    z = M*y;
    % Valutazione V punto
    vdot = -z'*Q*z+2*z'*P*ftilde(z);
    i = i+1;
    ok = (vdot<0);
end
```

Stime differenti della regione di asintotica stabilità possono essere ottenute utilizzando diverse funzioni di Lyapunov. A tal fine è sufficiente scegliere diverse matrici  $Q$  e ripetere la procedura riportata precedentemente. Una stima della regione di asintotica stabilità per il sistema in esame è riportata nella figura 6.

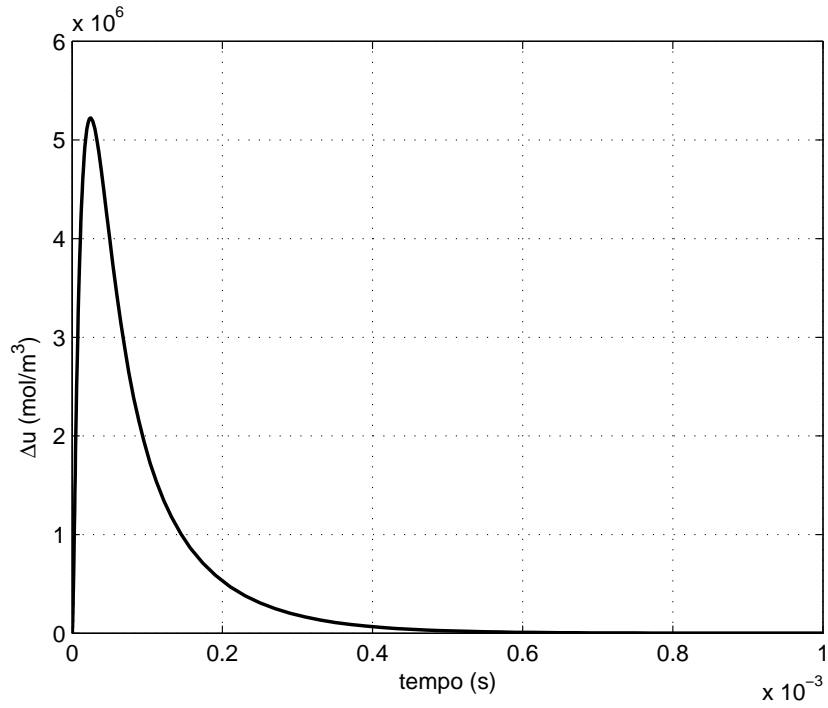


Figure 5: Andamento della concentrazione in ingresso di  $\text{NH}_3$  rispetto al suo valore di equilibrio.

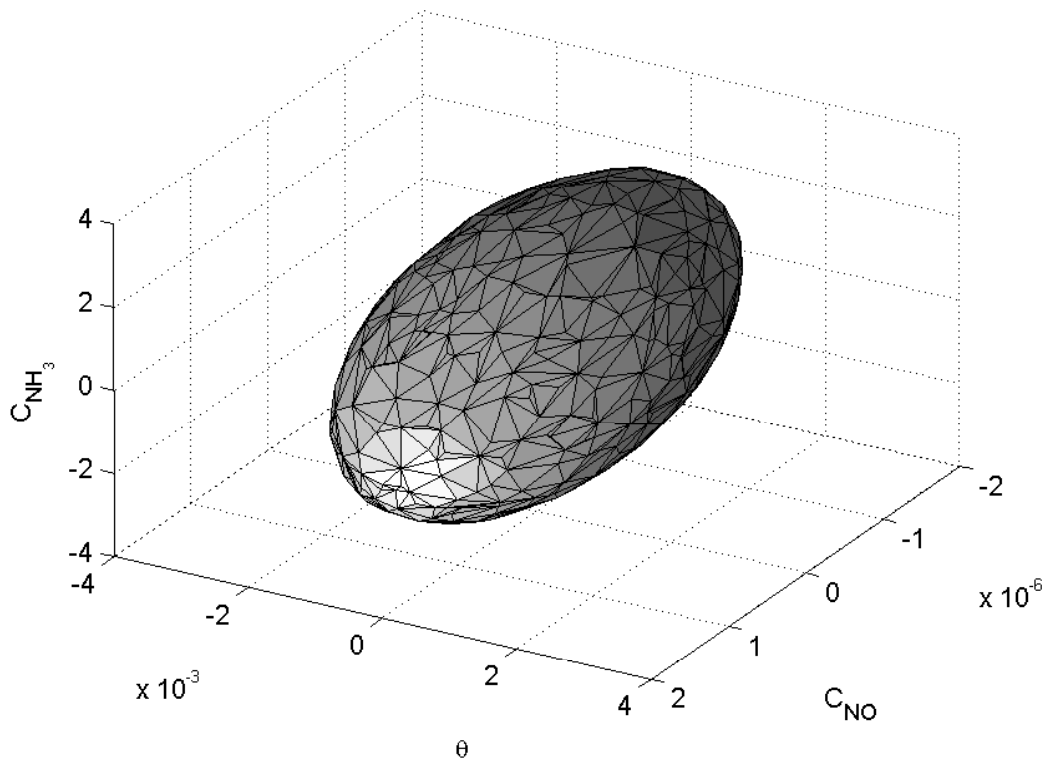


Figure 6: Stima, per difetto, della regione di asintotica stabilità del sistema in esame: variabili  $C_{\text{NO}}$ ,  $\theta$  e  $C_{\text{NH}_3}$ .