

**Quesito 1**

Si consideri il sistema meccanico in fig. 1.

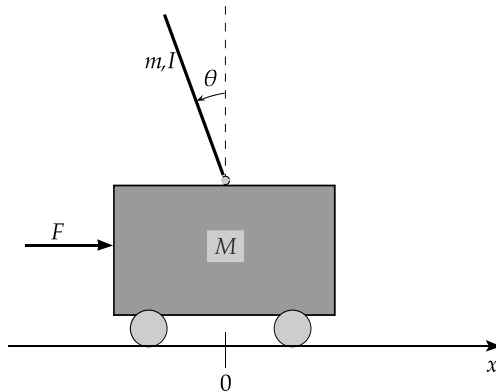


Figure 1: Modello di pendolo inverso su carrello.

Esso è costituito da un carrello di massa  $M$  libero di muoversi su di un piano e soggetto ad una forza di attrito di costante  $b$  e ad una forza esterna  $F$ . Superiormente al carrello è incernierato un pendolo inverso schematizzato come un'asta rigida di lunghezza  $L$ , massa  $m$  e momento di inerzia  $I$ . Il sistema risulta descritto dalle seguenti equazioni dinamiche

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta(\theta)} \begin{bmatrix} I + mL^2 & mL \cos \theta \\ mL \cos \theta & M + m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b\dot{x} - mL\dot{\theta}^2 \sin \theta + F \\ mgL \sin \theta \end{bmatrix},$$

dove  $\Delta(\theta) = (M + m)(I + mL^2) - m^2L^2 \cos^2 \theta \neq 0$  per ipotesi,  $x$  rappresenta lo spostamento orizzontale del carrello e  $\theta$  lo spostamento angolare del pendolo misurato rispetto alla verticale superiore.

- 1.A Si studi la raggiungibilità, l'osservabilità, la stabilizzabilità e la dettabilità del sistema nell'equilibrio con il pendolo in posizione verticale superiore supponendo di disporre alternativamente della misura dello spostamento lineare  $x$  e angolare  $\theta$ . A tal fine si faccia uso dei seguenti valori numerici:  $M = 0.5$  kg,  $m = 0.2$  kg,  $b = 0.1$  N s/m,  $L = 0.3$  m,  $I = 6 \cdot 10^{-3}$  kg m<sup>2</sup> e  $g = 9.8$  m/s<sup>2</sup>;
- 1.B Si progetti un compensatore basato sul regolatore che sia in grado di stabilizzare asintoticamente il sistema nell'origine e si effettui una simulazione del sistema a ciclo chiuso ottenuto connettendo il controllore con il modello non lineare del sistema.

**Quesito 2**

Si consideri il seguente sistema non lineare parametrico

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + ax_2 - bx_1x_2 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= -(a + b)x_1 + bx_1^2 - x_1x_2. \end{aligned}$$

- 2.A Si determinino i punti di equilibrio  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  al variare dei parametri  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ;
- 2.B Si studi la stabilità di detti punti nell'ipotesi  $a \neq -b$ .

## Soluzione

1.A Imponendo le condizioni di equilibrio ( $\ddot{\theta} = \ddot{x} = \dot{\theta} = \dot{x} = 0$ ) si ha:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta(\theta)} \begin{bmatrix} I + mL^2 & mL \cos \theta \\ mL \cos \theta & M + m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ mgL \sin \theta \end{bmatrix}$$

da cui si ottiene:

$$\begin{aligned} \theta &= k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \\ x &= \bar{x} \quad \text{qualunque} \\ F &= 0. \end{aligned}$$

Questi punti di equilibrio corrispondono alle posizioni verticali superiore ( $k = 2h$ ,  $h \in \mathbb{Z}$ ) e inferiore ( $k = 2h + 1$ ,  $h \in \mathbb{Z}$ ) del pendolo e a qualunque dislocazione del carrello. Tutti questi punti sono di equilibrio instabile poiché è sufficiente una velocità iniziale di traslazione del carrello piccola a piacere ma non nulla, per determinare un allontanamento indefinito del carrello.

La posizione verticale superiore del pendolo corrisponde (ad esempio) ad un valore nullo dell'angolo  $\theta$  e ad un qualunque valore  $\bar{x}$  della posizione del carrello con ingresso nullo. Scriviamo quindi il sistema in variabili di stato e controlli traslati rispetto a tale equilibrio. Il vettore di stato diviene  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [x - \bar{x} \ \theta \ \dot{x} \ \dot{\theta}]^T$ , e l'ingresso di controllo  $u = F$ . Il sistema non lineare risultante è

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} &= \hat{f}(\mathbf{x}, u) = \frac{1}{\Delta(\mathbf{x})} W(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}, u). \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{x}) &= (M + m)(I + mL^2) - m^2 L^2 \cos^2 x_2 \\ W(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} I + mL^2 & mL \cos x_2 \\ mL \cos x_2 & M + m \end{bmatrix} \\ v(\mathbf{x}, u) &= \begin{bmatrix} -bx_3 - mLx_4^2 \sin x_2 + u \\ mgL \sin x_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Calcoliamo il sistema linearizzato rispetto al punto di equilibrio

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}} &= [\bar{x} \ 0 \ 0 \ 0]^T \\ \bar{u} &= 0. \end{aligned}$$

A tal fine calcoliamo

$$\left. \frac{\partial \hat{f}(\mathbf{x}, u)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ u=\bar{u}}} = \frac{1}{\Delta(\bar{\mathbf{x}})} W(\bar{\mathbf{x}}) \left. \frac{\partial v(\mathbf{x}, u)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ u=\bar{u}}}.$$

Nella relazione precedente si è tenuto conto del fatto che  $v(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) = 0$ . Si ha che

$$\begin{aligned} \Delta(\bar{\mathbf{x}}) &= M(I + mL^2) + mI \\ W(\bar{\mathbf{x}}) &= \begin{bmatrix} I + mL^2 & mL \\ mL & M + m \end{bmatrix} \\ \left. \frac{\partial v(\mathbf{x}, u)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ u=\bar{u}}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & mgL & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Alle precedenti relazioni si poteva giungere anche considerando l'espansione in serie di Taylor arrestata al primo ordine delle componenti non lineari per  $\theta \approx 0$ :  $\sin \theta \approx \theta$ ,  $\cos \theta \approx 1$  e  $\dot{\theta}^2 \approx 0$ .

Il sistema linearizzato è quindi descritto dalle seguenti equazioni differenziali

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu,$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_3 & a_4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

con

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{m^2 g L^2}{\Delta(\bar{x})} & a_2 &= -\frac{b(I + mL^2)}{\Delta(\bar{x})} \\ a_3 &= \frac{mgL(M + m)}{\Delta(\bar{x})} & a_4 &= -\frac{bmL}{\Delta(\bar{x})} \\ \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} &= \frac{1}{\Delta(\bar{x})} W(\bar{x}) \left. \frac{\partial v(\mathbf{x}, u)}{\partial u} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} \frac{I+mL^2}{\Delta(\bar{x})} \\ \frac{mL}{\Delta(\bar{x})} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sostituendo i valori numerici riportati nel testo si ottiene

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2.6727 & -0.1818 & 0 \\ 0 & 31.1818 & -0.4545 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.8182 \\ 4.5455 \end{bmatrix}.$$

La matrice di raggiungibilità ( $R = [B \ AB \ A^2B \ A^3B]$ ) è la seguente

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1.8182 & -0.3306 & 12.2089 \\ 0 & 4.5455 & -0.8264 & 141.8858 \\ 1.8182 & -0.3306 & 12.2089 & -4.4287 \\ 4.5455 & -0.8264 & 141.8858 & -31.3196 \end{bmatrix},$$

che risulta avere rango massimo. Il sistema risulta quindi completamente raggiungibile e ovviamente stabilizzabile.

Per ciò che concerne l'osservabilità del sistema dalla misura dello spostamento orizzontale del carrello  $x$ , si ha:

$$\begin{aligned} C_1 &= [1 \ 0 \ 0 \ 0] \\ O_1 &= \begin{bmatrix} C_1 \\ C_1 A \\ C_1 A^2 \\ C_1 A^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2.6727 & -0.1818 & 0 \\ 0 & -0.4860 & 0.0331 & 2.6727 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

con  $\text{rank} O_1 = 4$ . Il sistema risulta quindi completamente osservabile e ovviamente detettabile dalla misura della variabile  $x$ . Analizziamo l'osservabilità del sistema dalla misura dello spostamento angolare del pendolo  $\theta$ :

$$\begin{aligned} C_2 &= [0 \ 1 \ 0 \ 0] \\ O_2 &= \begin{bmatrix} C_2 \\ C_2 A \\ C_2 A^2 \\ C_2 A^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 31.1818 & -0.4545 & 0 \\ 0 & -1.2149 & 0.0826 & 31.1818 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

con  $\text{rank} O_2 = 3$ . Il sistema non è completamente osservabile dalla misura di  $\theta$  e, dalla struttura della matrice  $O_2$ , risulta evidente che la variabile non osservabile è la  $x$ .

Allo scopo di determinare se il sistema sia detettabile dalla misura di  $\theta$ , si può procedere ad una sua decomposizione in parte osservabile e non osservabile e valutare la parte reale degli autovalori relativi al sistema non osservabile. L'analisi preventiva effettuata sulla natura degli equilibri ci induce a ritenere il sistema non detettabile. Il sottospazio di inosservabilità è dato ad esempio da

$$\bar{\mathcal{O}} = \ker O_2 = \text{span} \left\{ [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T \right\},$$

quindi una base per tale sottospazio sarà

$$T_{\mathcal{O}} = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T.$$

Un suo possibile completamento alla base di  $\mathbb{R}^4$  è dato dai restanti vettori della base canonica. Si ha pertanto che la matrice di cambiamento di base da impiegare per la decomposizione è la seguente

$$T = [ T_{\mathcal{O}} \mid T_{\mathcal{O}} ] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right].$$

Nelle nuove coordinate il sistema diviene

$$T^{-1}AT = \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2.6727 & -0.1818 & 0 & 0 \\ 31.1818 & -0.4545 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$C_2T = [ 1 \ 0 \ 0 \mid 0 ]$$

da cui si vede che l'autovalore relativo al sistema non osservabile è nullo. Il sistema nel suo complesso non è quindi detettabile dalla misura dell'angolo  $\theta$ .

- 1.B** Gli autovalori di  $A$  sono  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -5.5651$ ,  $\lambda_3 = -5.6041$  e  $\lambda_4 = -0.1428$ , quindi il sistema è instabile. Progettiamo una retroazione statica degli stati  $K$  in grado di allocare i poli del sistema a ciclo chiuso in  $p = [-2 \ -7 \ -10 \ -15]$ . Utilizzando la funzione di Matlab  $K = \text{place}(A,B,p)$  è possibile calcolare la matrice dei guadagni  $K$ . Si ottiene:

$$K = [-47.1429 \ 111.2971 \ -38.2633 \ 22.7453].$$

Poiché non si ha accesso a tutte le variabili di stato ma il sistema risulta completamente osservabile dall'uscita  $x$ , si può realizzare un osservatore di Luenberger per ricostruire lo stato. La matrice  $L$  di iniezione delle uscite è calcolata in modo che la matrice dinamica dello stimatore  $A - LC_1$  abbia autovalori  $q = 2p$ . Sempre impiegando il comando Matlab  $L = \text{transpose}(\text{place}(A',C_1',q))$  si ottiene:

$$L = \begin{bmatrix} 67.8182 \\ 5.8813 \cdot 10^3 \\ 1.5749 \cdot 10^3 \\ 3.1058 \cdot 10^4 \end{bmatrix}.$$

Il compensatore basato sul regolatore appena progettato ha dinamica  $K(sI - A + BK + LC_1)^{-1}L$  e si costruisce con il comando  $\text{rsys} = \text{ss}(A-B*K-L*C_1,L,K,0)$  ovvero, a meno di un segno, con  $\text{rsys} = \text{reg}(\text{sys},K,L)$ , ove  $\text{sys} = \text{ss}(A,B,C_1,0)$ .

Uno schema Simulink del sistema stabilizzato è riportato in figura 2.

Il blocco Simulink `pendolo inverso` contiene la seguente funzione:

```
function out = SistemaNONLineare(in)

% Ingressi del blocco
x1 = in(1);
x2 = in(2);
x3 = in(3);
x4 = in(4);
uu = in(5);

% Costanti del sistema e punto di equilibrio
ParametriSistema;

% Traslazione
```

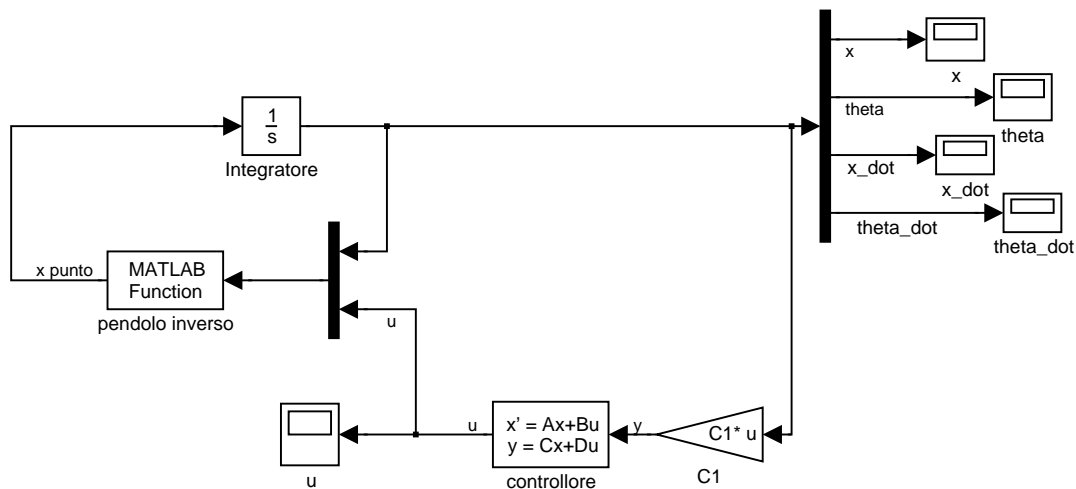


Figure 2: Schema Simulink del sistema stabilizzato con controllore lineare.

```

z1 = x1 + x_eq;
z2 = x2 + theta_eq;
z3 = x3 + x_dot_eq;
z4 = x4 + theta_dot_eq;
u = u_eq + uu;

% Dinamica del sistema
Delta_x = (M+m)*(I+m*L^2)-m^2*L^2*cos(z2)^2;
W_x = [I+m*L^2      m*L*cos(z2)
        m*L*cos(z2)  M+m];
v_x_u = [-b*z3-m*L*z4^2*sin(z2)+u
          m*g*L*sin(z2)];
x34 = inv(Delta_x)*W_x*v_x_u;

dot_x1 = z3;
dot_x2 = z4;
dot_x3 = x34(1);
dot_x4 = x34(2);

% Uscite del blocco
out(1) = dot_x1;
out(2) = dot_x2;
out(3) = dot_x3;
out(4) = dot_x4;

```

dove lo *script* `ParametriSistema` contiene i valori numerici di tutti i parametri del sistema. Il blocco `controllore` contiene le matrici del regolatore precedentemente progettato.

Per valutare il controllore lineare consideriamo un valore iniziale di  $\theta$  pari a 0.1 rad e le altre variabili di stato all'equilibrio. Le figure 3, 4, 5 e 6 riportano l'andamento dello scostamento dal punto di equilibrio delle variabili  $x$ ,  $\theta$ ,  $\dot{x}$  e  $\dot{\theta}$  rispettivamente.

Nella figura 7, invece, è riportato l'andamento della forza esterna  $F$  rispetto al suo valore di equilibrio, cioè della variabile di controllo  $u$ .

**2.A** Per il calcolo dei punti di equilibrio poniamo

$$\begin{aligned}
 0 &= -x_1 + ax_2 - bx_1x_2 + x_2^2 \\
 0 &= -(a+b)x_1 + bx_1^2 - x_1x_2.
 \end{aligned}$$

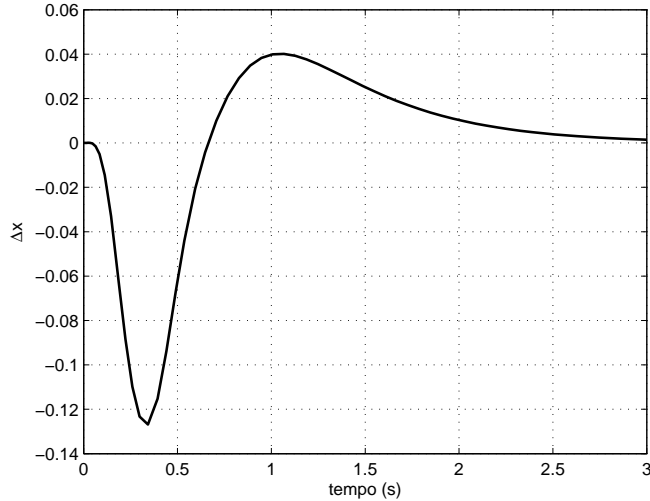


Figure 3: Andamento dello scostamento di  $x$  rispetto al valore di equilibrio.

Discriminando i casi  $x_1 = 0$ ,  $x_1 \neq 0$ ,  $x_2 = 0$  e  $x_2 \neq 0$ , si ottengono tre equilibri, due dei quali parametrici

$$\begin{aligned}
 1) & \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \\
 2) & \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -a \end{cases} \\
 3) & \quad \begin{cases} x_1 = \frac{b(a+b)}{b^2+1} \\ x_2 = -\frac{a+b}{b^2+1} \end{cases} .
 \end{aligned}$$

**2.B** Per valutarne la stabilità procediamo utilizzando il metodo diretto di Lyapunov. Il sistema linearizzato nell'equilibrio generico  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  è dato da

$$A = \begin{bmatrix} -1 - b\bar{x}_2 & a - b\bar{x}_1 + 2\bar{x}_2 \\ -(a+b) + 2b\bar{x}_1 - \bar{x}_2 & -\bar{x}_1 \end{bmatrix} .$$

Consideriamo ora i singoli punti di equilibrio:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} -1 & a \\ -(a+b) & 0 \end{bmatrix} \\
 A_2 &= \begin{bmatrix} -1 + ab & -a \\ -b & 0 \end{bmatrix} \\
 A_3 &= \frac{1}{b^2+1} \begin{bmatrix} ab-1 & -(a+2b+b^3) \\ b^2(a+b) & -b(a+b) \end{bmatrix} .
 \end{aligned}$$

I polinomi caratteristici delle tre matrici sono i seguenti

$$\begin{aligned}
 p_1(\lambda) &= \lambda^2 + \lambda + a(a+b) \\
 p_2(\lambda) &= \lambda^2 + \lambda(1-ab) - ab \\
 p_3(\lambda) &= \lambda^2 + \lambda + b(a+b) .
 \end{aligned}$$

Utilizzando la regola di Cartesio per i segni dei polinomi di secondo grado possiamo asserire che:

1. Il primo punto di equilibrio è:

- *asintoticamente stabile* se valgono le condizioni

$$\begin{cases} a > 0 \\ a > -b \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} a < 0 \\ a < -b \end{cases} ;$$

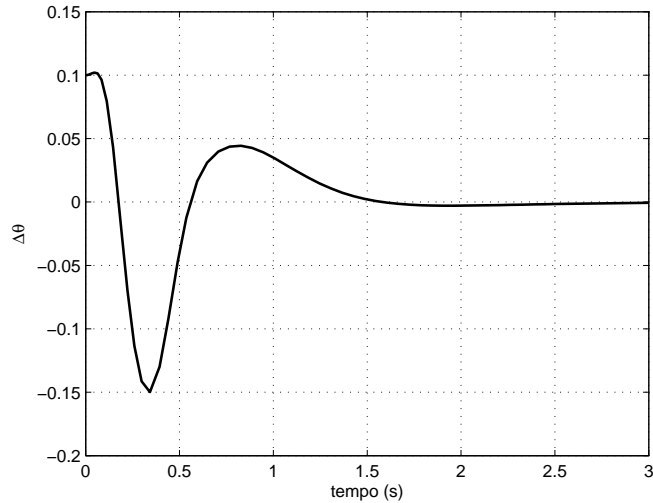


Figure 4: Andamento dello scostamento di  $\theta$  rispetto al valore di equilibrio.

- *instabile* se valgono le condizioni

$$\left\{ \begin{array}{l} a < 0 \\ a > -b \end{array} \right. \quad \text{o} \quad \left\{ \begin{array}{l} a > 0 \\ a < -b \end{array} \right. ;$$

- nulla si può dire dal linearizzato se

$$a = -b.$$

La condizione  $a = 0$  è scartata per ipotesi.

2. Il secondo punto di equilibrio è:

- *asintoticamente stabile* se valgono le condizioni

$$\left\{ \begin{array}{l} a > 0 \\ b < 0 \end{array} \right. \quad \text{o} \quad \left\{ \begin{array}{l} a < 0 \\ b > 0 \end{array} \right. ;$$

- *instabile* se valgono le condizioni

$$\left\{ \begin{array}{l} a < 0 \\ b < 0 \end{array} \right. \quad \text{o} \quad \left\{ \begin{array}{l} a > 0 \\ b > 0 \end{array} \right. ;$$

3. Il terzo punto di equilibrio è:

- *asintoticamente stabile* se valgono le condizioni

$$\left\{ \begin{array}{l} b > 0 \\ a > -b \end{array} \right. \quad \text{o} \quad \left\{ \begin{array}{l} b < 0 \\ a < -b \end{array} \right. ;$$

- *instabile* se valgono le condizioni

$$\left\{ \begin{array}{l} b < 0 \\ a > -b \end{array} \right. \quad \text{o} \quad \left\{ \begin{array}{l} b > 0 \\ a < -b \end{array} \right. ;$$

- nulla si può dire dal linearizzato se

$$a = -b.$$

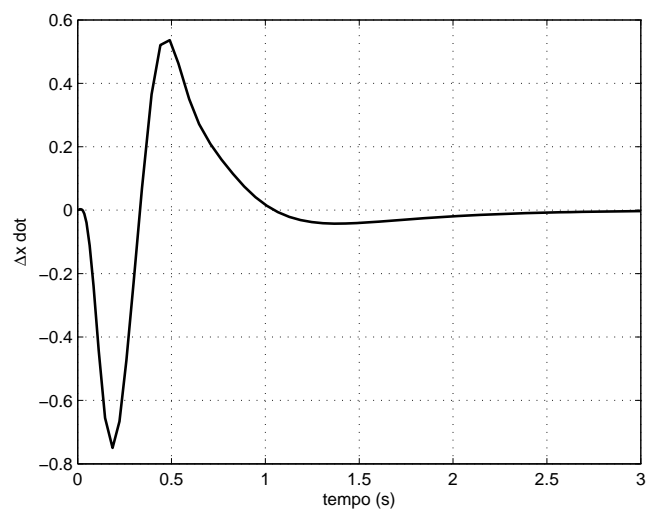


Figure 5: Andamento dello scostamento di  $\dot{x}$  rispetto al valore di equilibrio.

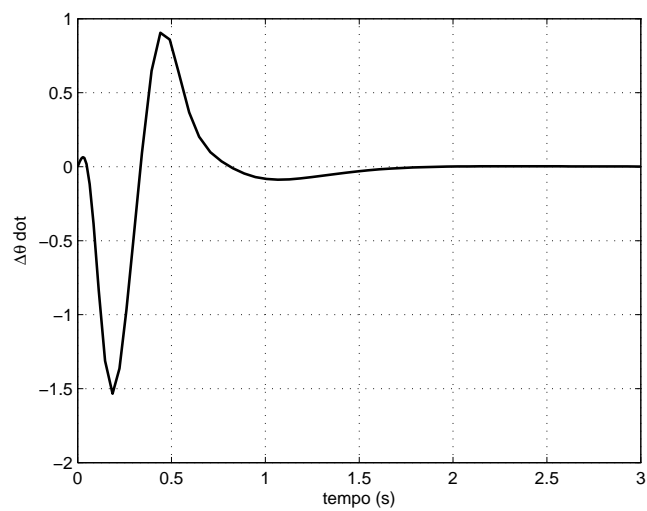


Figure 6: Andamento dello scostamento di  $\dot{\theta}$  rispetto al valore di equilibrio.



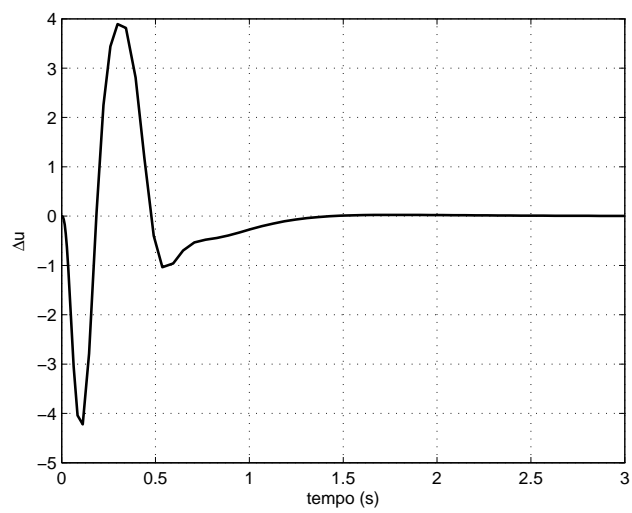


Figure 7: Andamento della forza esterna  $F$  rispetto al suo valore di equilibrio.