

Esercizio

Si consideri il sistema meccanico rappresentato in figura 1. Esso è costituito da un pendolo inverso di massa M e lunghezza R , soggetto all'accelerazione di gravità g e attuato attraverso un motore in grado di fornire una coppia τ . Il motore risulta caratterizzato dalla funzione di trasferimento tra la tensione di alimentazione v e la coppia di uscita τ indicata nella figura, con costanti $a, p, q > 0$ e $a \neq p \neq q$. Il pendolo risulta incernierato attraverso un giunto rotoidale, che oppone al moto del pendolo stesso una forza di attrito viscoso di costante β . Detto θ l'angolo compreso tra il piano orizzontale e il pendolo, la dinamica che ne descrive il moto risulta descritta da

$$MR^2 \ddot{\theta} + \beta \dot{\theta} + MgR \cos \theta = \tau,$$

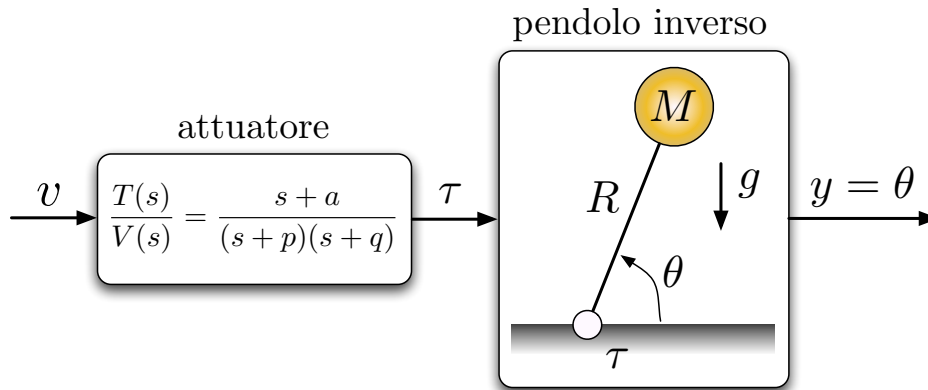


Figura 1: Schema meccanico del sistema

- A** Supponendo che il sistema sia controllato regolando la tensione v dell'attuatore, si determini, in forma simbolica, il regime di equilibrio del sistema costituito dalla serie del pendolo e dell'attuatore, corrispondente ad un valore costante \bar{v} della tensione di ingresso;
- B** Supponendo di disporre della misura dell'angolo θ e di poter comandare la tensione v , si determini una rappresentazione lineare approssimata del sistema attorno agli equilibri trovati;
- Si considerino i valori numerici $M = 1$ Kg, $R = 0.4$ m, $g = 9.81$ m/s², $a = 20$, $p = 10$ e $q = 5$.
- C** Si discuta la stabilità del sistema nell'intorno degli equilibri trovati al variare della costante di attrito viscoso β , assumendo il valore $\bar{v} = \frac{MRpqg\sqrt{2}}{2a}$ per la tensione di ingresso dell'attuatore;
- D** Per $\beta = 0.5$ Nm sec/rad, si determini per ciascun equilibrio la funzione di trasferimento tra l'ingresso v e l'uscita θ e si discutano le differenze;
- E** Per il modello linearizzato attorno all'equilibrio con $\bar{\theta} > 0$ si determini una legge di controllo per la tensione v che agisca in modo tale da garantire le seguenti specifiche:
- partendo da $\theta = 0$, il pendolo deve portarsi a regime ad un valore $\theta = \hat{\theta}$, raggiungendo un valore compreso nell'intervallo $\hat{\theta} \pm 2\%$ in un tempo non superiore a 5 s e senza mai eccedere un valore limite di $1.1 \hat{\theta}$.
 - supponendo che il sensore che misura l'angolo θ sia affetto da un errore pari al massimo a 0.1 rad per pulsazione superiori a 50 rad/s, si garantisca che l'effetto sulla regolazione dell'uscita sia inferiore a $\pm 5 \cdot 10^{-3}$ rad.

Si riporti esplicitamente il controllore ottenuto, il diagramma di Bode con le relative specifiche da rispettare e la risposta al gradino ottenuta con le caratteristiche significative.

Soluzione esercizio

A) Una realizzazione minima della funzione di trasferimento $T(s)/V(s)$ dell'attuatore è rappresentata dalla forma canonica di controllo

$$\Sigma_{att} : \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -pq & -(p+q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} v, \\ \tau = (a \quad 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Inoltre, definendo $x_3 = \theta$ e $x_4 = \dot{\theta}$, la dinamica del pendolo può essere scritta nella forma di stato

$$\Sigma_{pend} : \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 \\ -\frac{g}{R} \cos(x_3) - \frac{\beta}{MR^2} x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{MR^2} \end{pmatrix} \tau. \\ y = x_3. \end{cases}$$

Pertanto, definendo lo stato complessivo $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, e con $u = v$ l'ingresso, la dinamica della serie formata dall'attuatore e dal pendolo ammette la forma di stato non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -pq x_1 - (p+q) x_2 + v, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = \frac{a}{MR^2} x_1 + \frac{1}{MR^2} x_2 - \frac{g}{R} \cos(x_3) - \frac{\beta}{MR^2} x_4, \\ y = x_3, \end{cases}$$

in cui si è sostituita alla coppia τ la sua espressione in funzione dello stato dell'attuatore.

Imponendo $\dot{x} = 0$ e assumendo una tensione di ingresso costante, $v = \bar{v}$, si ottengono gli equilibri

$$\bar{x} = \left(\frac{\bar{v}}{pq}, 0, \arccos\left(\frac{a\bar{v}}{MRpqg}\right), 0 \right)^T.$$

B) Linearizzando attorno ai punti di equilibrio $\bar{x} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4]$ precedentemente trovati e $u = \bar{v}$, si ottiene:

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(pq) & -(p+q) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{a}{MR^2} & \frac{1}{MR^2} & \frac{g}{R} \sin \bar{x}_3 & -\frac{\beta}{MR^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Infine, essendo θ l'uscita del sistema si ottiene

$$\theta = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] x = Cx.$$

Alternativamente, per i punti A, B, si può procedere considerando i due sistemi, attuatore e pendolo inverso, in modo separato. L'equazione dinamica associata all'attuatore è ottenuta dalla f.d.t. associata e assegnata nel testo è data da

$$\ddot{\tau} + (p+q)\dot{\tau} + pq\tau = \dot{v} + av.$$

All'equilibrio si deve avere $\ddot{\tau} = \dot{\tau} = \dot{v} = 0$, pertanto il valore di τ all'equilibrio risulta

$$\bar{\tau} = \frac{a}{pq} \bar{v}.$$

Analogamente, considerando il pendolo inverso, all'equilibrio dobbiamo avere $\ddot{\theta} = \dot{\theta} = 0$, per cui il valore di θ all'equilibrio risulta

$$\bar{\theta} = \pm \arccos\left(\frac{\bar{\tau}}{MgR}\right).$$

Una volta trovati i punti di equilibrio dei due sistemi, è possibile procedere calcolando la forme di stato dei due sistemi separati. La funzione di trasferimento del sistema globale, essendo questo composto dalla serie dei due sistemi, potrà infatti essere calcolata come prodotto fra le due f.d.t.

Una realizzazione in forma di stato dell'attuatore è rappresentata dalla forma canonica di controllo, ottenuta come illustrato precedentemente. Considerando invece il pendolo inverso e definendo come variabili di stato $\tilde{x} = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2] = [\theta, \dot{\theta}]$ e come ingresso $\tilde{u} = \tau$, una realizzazione in forma di stato nel punto di equilibrio $\tilde{x} = [\pm \arccos(\frac{\tilde{u}}{MgR}), 0]$ è data da

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{u} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{R} \sin(\tilde{x}_1) & -\frac{\beta}{MR^2} \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{MR^2} \end{bmatrix} \tilde{u} \\ y &= \theta = \tilde{C} \tilde{x} = [1 \quad 0] \tilde{x}\end{aligned}$$

da cui si ottiene la f.d.t. in forma simbolica

$$\tilde{G}_P(s) = \frac{1}{MR^2 s^2 + \beta s - MgR \sin(\tilde{x}_1)}.$$

C) Al fine di studiare la stabilità del sistema consideriamo il polinomio caratteristico della matrice dinamica A che risulta essere

$$\pi_A(s) = (s+p)(s+q)\pi(s), \quad \text{con } \pi(s) = \left(s^2 + s \frac{\beta}{MR^2} - \frac{g}{R} \sin(\tilde{x}_3) \right),$$

che ammette come radici $s_1 = -p < 0$, $s_2 = -q < 0$ e i valori s_3 ed s_4 che risolvono $\pi(s) = 0$. Sostituendo il valore $\bar{v} = \frac{MRp q g \sqrt{2}}{2a}$ nell'espressione della terza componente dello stato all'equilibrio, si ricavano i due valori $\bar{x}_{3a} = \frac{\pi}{4} \pm 2\pi k$ e $\bar{x}_{3b} = -\frac{\pi}{4} \pm 2\pi k$, con k naturale.

Nel caso dell'equilibrio corrispondente a $\bar{x}_{3a} = \frac{\pi}{4}$ e per $\beta > 0$, $\pi(s)$ presenta una permanenza e una variazione di segno, il che consente di concludere che una delle sue soluzioni è positiva (secondo la regola di Cartesio) e quindi che l'equilibrio è instabile. Per $\beta = 0$ le soluzioni, calcolate direttamente, sono $s_3 = \sqrt{\frac{g\sqrt{2}}{2R}} > 0$ e $s_4 = -s_3$, che permette di concludere anche in questo caso per l'instabilità. Invece, per l'equilibrio corrispondente a $\bar{x}_{3b} = -\frac{\pi}{4}$ e per $\beta > 0$, $\pi(s)$ presenta due permanenze di segno che indicano due radici con parte reale negativa e quindi che l'equilibrio è stabile asintoticamente. Infine, per $\beta = 0$, le soluzioni sono $s_3 = i\sqrt{\frac{g\sqrt{2}}{2R}}$ e $s_4 = -s_3$, per cui il sistema linearizzato risulta soltanto stabile.

D) Sostituendo i valori numerici assegnati si ottiene:

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -50 & -15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 125 & 6.25 & 24.25 \sin \bar{x}_3 & -3.125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\theta = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] x = Cx.$$

Considerando l'equilibrio per $\bar{\theta} > 0$, la funzione di trasferimento tra l'ingresso v e l'uscita θ diviene complessivamente

$$G_A(s) = \frac{6.25(s+20)}{(s+6.01)(s+5)(s+10)(s-2.885)}.$$

Questa presenta tre radici negative $\lambda_1 \approx -6$, $\lambda_2 \approx -5$, $\lambda_3 \approx -10$ e una radice reale positiva $\lambda_4 \approx 2.885$ ed è quindi instabile.

La funzione di trasferimento presenta inoltre uno zero reale negativo.

Considerando invece il caso in cui $\bar{\theta} < 0$, la funzione di trasferimento tra l'ingresso v e l'uscita θ diviene

$$G_B(s) = \frac{6.25(s+20)}{(s+5)(s+10)(s^2+3.125s+17.34)}$$

Questa presenta due radici complesse coniugate a parte reale negativa $\lambda_{1,2} \approx -1.5625 \pm 3.8601i$, e due radici reali a parte reale negativa $\lambda_3 \approx -5$, $\lambda_4 \approx -10$ ed è quindi stabile. Si osserva inoltre che le due f.d.t. hanno gli stessi zeri.

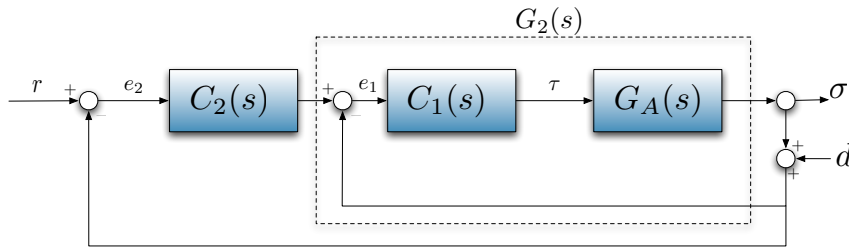


Figura 2: Schema a blocchi complessivo (controllo in cascata).

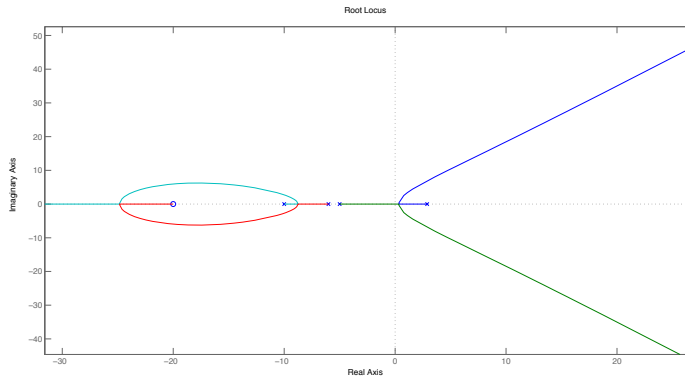


Figura 3: Luogo delle radici della f.d.t. $G(s)$.

E A causa del polo positivo, il sistema in anello aperto risulta essere instabile. Conseguentemente, prima di progettare un controllore in grado di soddisfare sia le specifiche statiche che quelle dinamiche, si procede con il progetto di un primo controllore stabilizzante per realizzare successivamente un controllo in cascata come riportato in figura 2. La progettazione di un controllore stabilizzante si può effettuare utilizzando la tecnica del Luogo delle Radici.

Un possibile controllore stabilizzante è

$$C_1(s) = \frac{10(s+3)}{(s+30)}$$

Il controllore è ottenuto direttamente sul luogo delle radici della f.d.t. d'anello che è costituito da due rami nel semipiano positivo uscenti dall'asse reale in un punto compreso fra il polo instabile e il polo stabile più vicino all'origine (figura 3). Per attirare tali rami nel semipiano sinistro è possibile utilizzare una rete anticipatrice costituita ad esempio da uno zero in -3 e un polo in alta frequenza a -30. Aggiustando poi il guadagno del controllore si ottiene una f.d.t. in anello chiuso asintoticamente stabile. La figura 4 riporta il luogo delle radici della f.d.t. $C_1(s)G(s)$.

La f.d.t. dell'anello stabilizzante risulta

$$G_2(s) = \frac{625(s+20)(s+3)}{(s+30.42)(s+12.95)(s+1.611)(s^2+3.145s+18.11)}$$

e1) Il progetto di un controllore dell'anello esterno nello schema a cascata del tipo

$$C_2(s) = \frac{K_{c_2}}{s^t} C_0(s), \text{ con } C_0(0) \geq 1.$$

tale da soddisfare le specifiche statiche e dinamiche può essere fatto direttamente sui diagrammi di Bode in quanto la f.d.t. $G_2(s)$ sulla quale il controllore $C_2(s)$ agisce è asintoticamente stabile. Iniziamo con la scelta del tipo t e della costante di guadagno K_{c_2} del controllore basandoci sulle specifiche statiche. La prima specifica chiede errore nullo a regime per l'inseguimento a segnali costanti $\sigma(t) = \bar{\sigma}$. Per tale motivo, poichè $G_2(s)$ non possiede poli nell'origine, è necessario porre $t = 1$ nel controllore. La costante K_{c_2} non è fissata dalle specifiche statiche (lo potrebbe essere se ad esempio fosse richiesto un errore di inseguimento limitato ad un

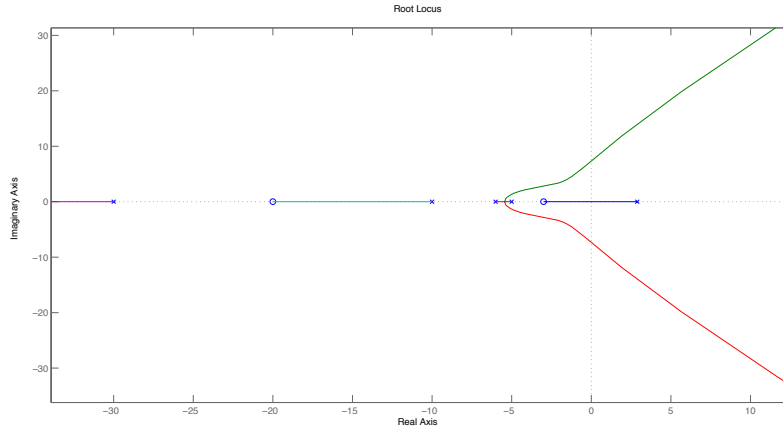


Figura 4: Luogo delle radici della f.d.t. $C_1(s)G(s)$.

riferimento a rampa lineare). Il valore di K_{c2} sarà quindi determinato successivamente per rispettare le altre specifiche.

Nella seconda parte della specifica è richiesto un tempo di assestamento al 2% del valore di regime inferiore a 5s, permettendo una sovraelongazione che al massimo sia pari al 10% del valore costante $\hat{\theta}$ assegnato. Tentiamo di esaudire queste specifiche progettando un controllore che permetta di approssimare il sistema in anello chiuso con un modello a due poli dominanti le cui caratteristiche frequenziali siano

$$S = e\left(-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}\right) \Rightarrow \delta = 0.60 \Rightarrow M_\phi \approx 60 \text{ deg}$$

$$\omega_T = \frac{4}{\delta T_a} \Rightarrow \omega_T \approx 1.33 \text{ rad/s}$$

Il diagramma di Bode con i vincoli sulla pulsazione di taglio ω_T sono riportati in figura 5.

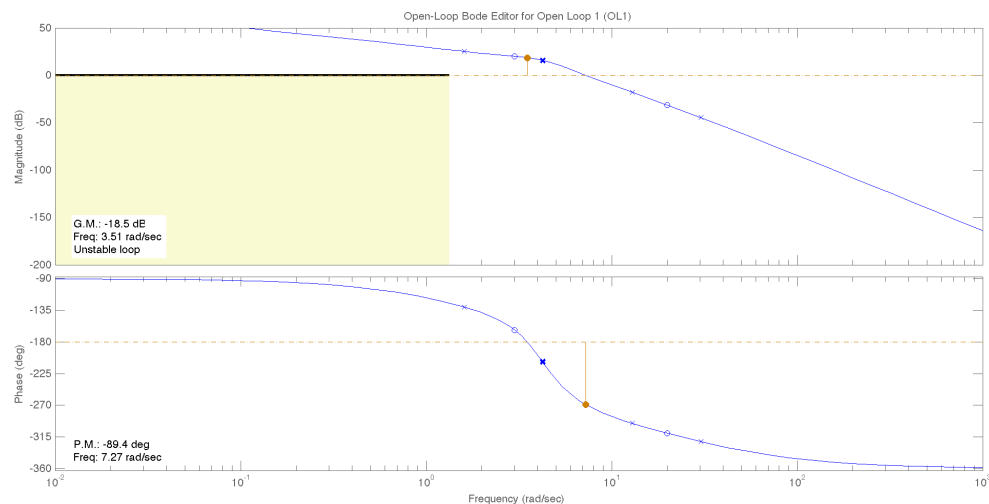


Figura 5: Diagramma di Bode della f.d.t. $\frac{K_{c2}}{s}G_2(s)$ con specifica sulla banda passante.

e2) Il quesito si riferisce ad una specifica sul rumore di misura. Sia quindi d_k il disturbo sul sensore di misura e si indichi con

$$Y(s) = -\frac{G(s)C_1(s)(1+C_2(s))}{1+G(s)C_1(s)(1+C_2(s))}D_k(s) = -\frac{G_2(s)(1+C_2(s))}{1+G_2(s)C_2(s)}D_k(s) = \bar{G}(s)D_k(s),$$

la f.d.t. tra il disturbo di misura e l'uscita del sistema. La specifica si traduce (sempre supponendo l'asintotica stabilità del sistema a ciclo chiuso e applicando quindi il teorema della

risposta armonica) in una richiesta di attenuazione del disturbo di misura pari a 0.05, ovvero (supponendo che $|C_2(s)G_2(s)| \ll 1$ nel campo di frequenze scelto)

$$|\bar{G}(s)| = \frac{|(1 + C_2(s))G_2(s)|}{|1 + C_2(s)G_2(s)|} \approx |(1 + C_2(s))G_2(s)| < 0.05,$$

per pulsazioni maggiori di 50 rad/s. Utilizzando la disuguaglianza triangolare è possibile scrivere

$$|G_2(s)C_2(s) + G_2(s)| \leq |G_2(s)C_2(s)| + |G_2(s)| < 0.05,$$

Dai diagrammi di Bode (figura 7) è possibile osservare che il modulo di $G_2(s)$ per pulsazioni maggiori di 50 rad/s è inferiore a 0.0045, cioè $-47dB$, quindi la specifica rispettata se

$$|G_2(s)C_2(s)| < 0.05 - 0.0045 \approx -30db,$$

per pulsazioni superiori a 50 rad/s. Le limitazioni relative a questa specifica sono riportate in figura 6.

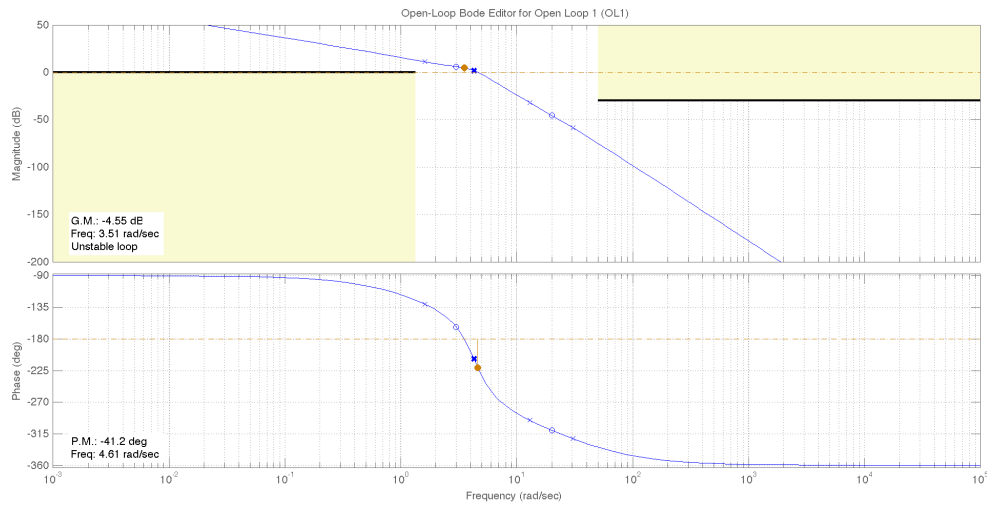


Figura 6: Diagramma di Bode della f.d.t. $\frac{K_{c2}}{s}G_2(s)$ con le specifiche di progetto.

Progetto del controllore.

Una possibile soluzione per il controllore $C_2(s)$ in grado di rispettare tutte le specifiche proposte consiste in una azione anticipatrice complessa con due zeri complessi coniugati in $z_{1,2} = -1.3000 \pm 3.4000i$ e due poli complessi coniugati in $p = -45.0000 \pm 4.0000i$, e ponendo il guadagno $K = 123$, ovvero

$$C_2(s) = 123 \frac{(s^2 + 2.6s + 13.25)}{s(s^2 + 90s + 2041)}$$

per la quale il diagramma di Bode della funzione di trasferimento in anello aperto è riportato in fig. 8. Si noti che il controllore presenta un polo nell'origine (come richiesto per la specifica statica), e due zeri necessari per dare un incremento di fase ed alzare il diagramma di Bode per la specifica sulla pulsazione di taglio e sul margine di fase. In fig. 9 è riportato il diagramma di Bode del sistema controllato. In fig. 10 è invece riportata la risposta ad un ingresso a gradino del sistema controllato.

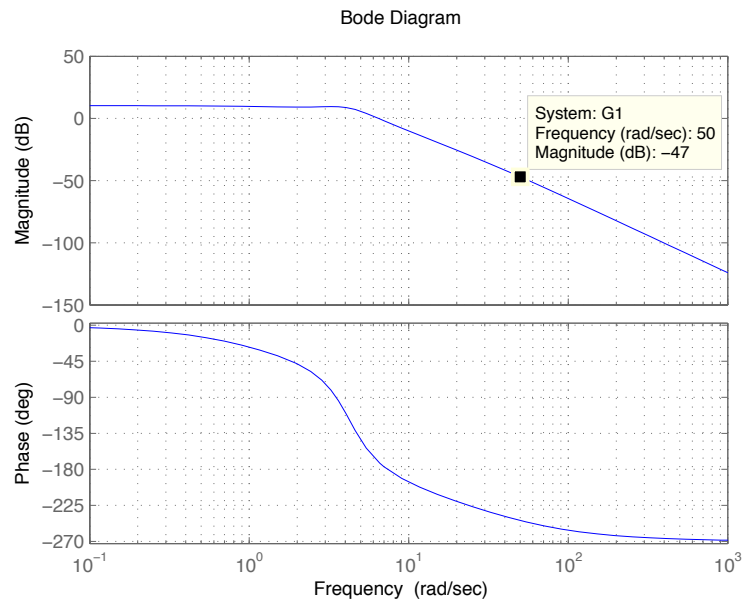


Figura 7: Diagramma di Bode della f.d.t. $G_2(s)$.

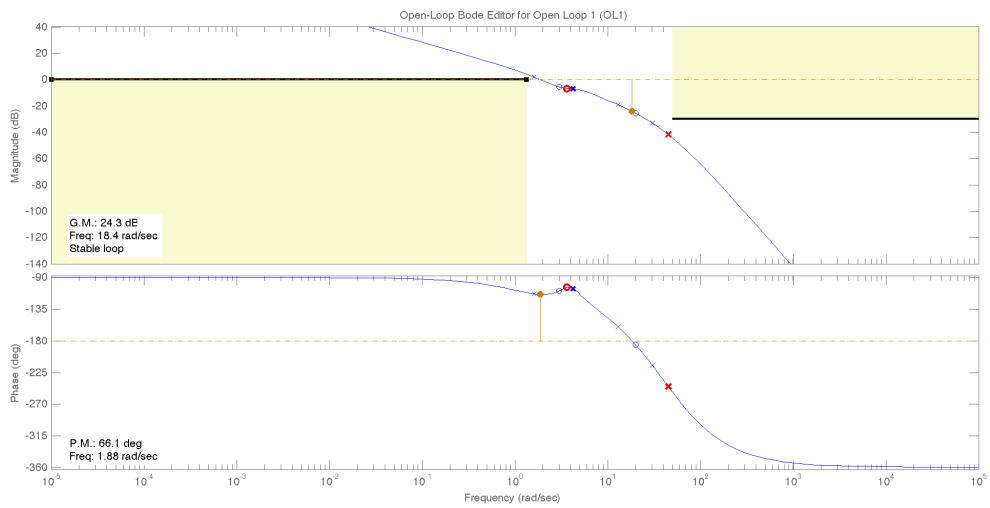


Figura 8: Diagramma di Bode risultante dal progetto della f.d.t. d'anello $C_2(s)G_2(s)$.

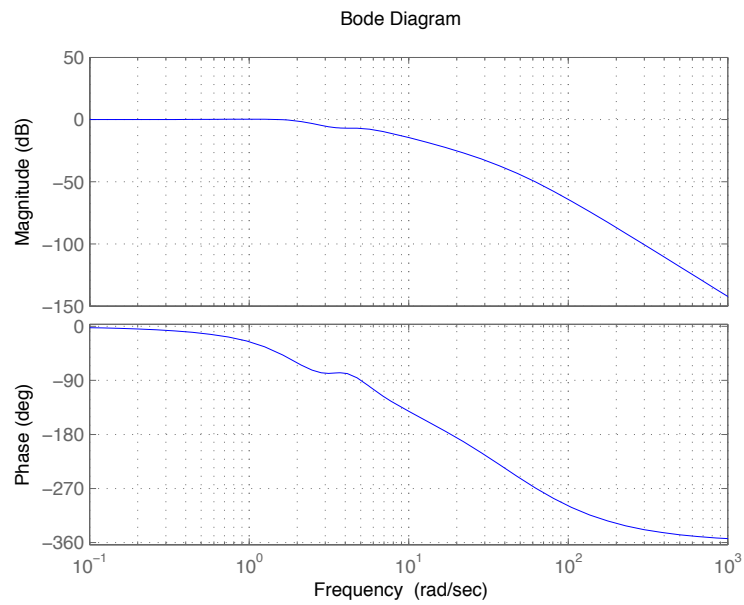


Figura 9: Diagramma di Bode del sistema controllato.

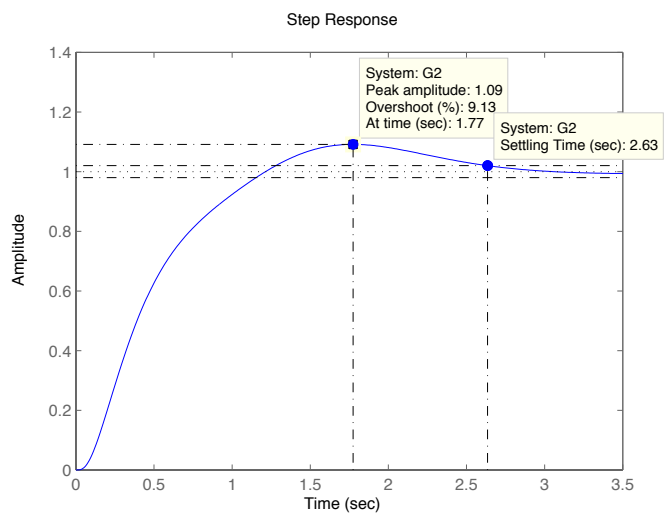


Figura 10: Risposta al gradino del sistema controllato.