

Esercizio 1.

Si consideri il sistema meccanico riportato in figura 1.

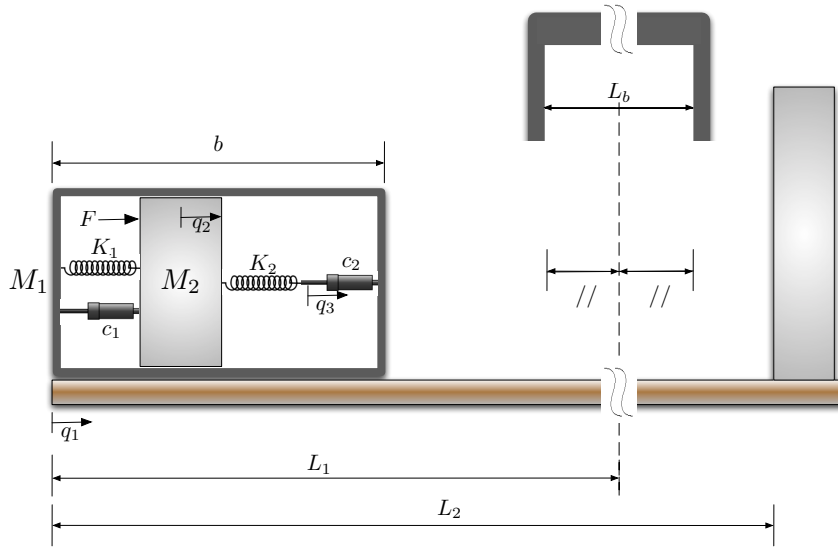


Figura 1: Schema del sistema.

Esso è costituito da un contenitore di massa M_1 che può scivolare senza attrito su un piano orizzontale. All'interno del contenitore è presente un corpo di massa M_2 connesso alla parete sinistra del contenitore per mezzo di una molla di costante k_1 e uno smorzatore di costante c_1 posti in parallelo ed alla parete destra per mezzo di una molla di costante k_2 e uno smorzatore di costante c_2 posti in serie. Si consideri inoltre che il contatto tra la massa M_2 e le pareti interne del contenitore sia senza attrito. Il modello che descrive la dinamica di tale sistema è

$$\begin{cases} M_1 \ddot{q}_1 + c_1(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) + k_1(q_1 - q_2) + k_2(q_1 - q_3) = 0 \\ M_2 \ddot{q}_2 + c_1(\dot{q}_2 - \dot{q}_1) + c_2(\dot{q}_2 - \dot{q}_3) + k_1(q_2 - q_1) = F \\ c_2(\dot{q}_3 - \dot{q}_2) + k_2(q_3 - q_1) = 0 \end{cases}$$

dove q_1 indica la posizione del contenitore, q_2 quella del corpo interno, e q_3 la posizione del punto di giunzione dello smorzatore c_2 con la molla k_2 . Infine, F è la forza applicata sul corpo interno.

A.1 Si determinino le condizioni di equilibrio per il sistema;

B.1 supponendo di disporre della misura della posizione del contenitore q_1 e di poter agire sulla massa M_2 per mezzo della forza F , si determini, in forma simbolica, una rappresentazione del sistema in forma di stato attorno all'equilibrio determinato al punto precedente.

Si considerino i seguenti valori numerici: $M_1 = 2$ Kg, $M_2 = 1$ Kg, $c_1 = 2$ Kg/s, $c_2 = 1$ Kg/s, $k_1 = 3$ N/m, $k_2 = 1$ N/m, $L_1 = 1.1$ m, $L_2 = 1.25$ m, $b = 0.2$ m e $L_p = 0.24$ m.

C.1 Si determini una legge di controllo per la forza F che agisca in modo da garantire le seguenti specifiche:

C.1-a si garantisca che il contenitore si porti in un tempo non superiore a 0.5 s in una posizione nella quale può essere afferrato da una attrezzatura di apertura L_p centrata a distanza L_1 , evitando allo stesso tempo che il contenitore vada a colpire un ostacolo posto a distanza L_2 ;

C.1-b assumendo che sulla forza F utilizzata come ingresso di controllo agisca un disturbo $d_F = \bar{d} + \sum_{k=1}^3 \frac{1}{3(k+20)} \sin(\omega_k t + k\pi/2)$ con $\omega_k = \frac{2}{k+1} 10^{-1}$ rad/s, si garantisca che l'effetto sull'uscita q_1 sia inferiore a 5 mm.

Si riporti esplicitamente il controllore ottenuto, il diagramma di Bode con le relative specifiche da rispettare e la risposta al gradino ottenuta con le caratteristiche significative.

Esercizio 2

Si considerino le seguenti funzioni di trasferimento:

$$C(s) = K, \quad G(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)}, \quad R(s) = \frac{s+6}{s+p},$$

e lo schema di controllo in retroazione mostrato in figura 2.

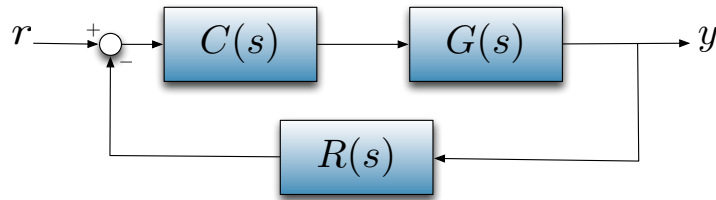


Figura 2: Schema a blocchi.

- A.2** Si determini il range di valori per il guadagno K del controllore tale da garantire la asintotica stabilità del sistema retroazionato per $p = \bar{p} = 7$;
- B.2** Si scelga un valore di K all'interno del range di cui al punto precedente, e si valuti la stabilità dell'anello per variazioni di ± 1 del parametro p rispetto al valore nominale \bar{p} .

Soluzione

Esercizio 1.

A.1 Il sistema è descritto da cinque variabili di stato q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1 e \dot{q}_2 . Dalla terza equazione si ricava che $\bar{q}_1 = \bar{q}_3$, mentre dalla prima si ha che $\bar{q}_2 = \bar{q}_1 = \bar{q}_3$ e quindi che $F = 0$.

B.1 Indicando con $x = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T = [q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2]^T$ le variabili di stato del sistema non traslato e con $u = F$ l'ingresso non traslato, si ottiene il seguente sistema non lineare in forma di stato

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_4 \\ \dot{x}_2 = x_5 \\ \dot{x}_3 = -\frac{k_2}{c_2}(x_3 - x_1) + x_5 \\ \dot{x}_4 = -\frac{c_1(x_4 - x_5) + k_1(x_1 - x_2) + k_2(x_1 - x_3)}{m_1} \\ \dot{x}_5 = \frac{u - (c_1(x_5 - x_4) + c_2(x_5 - (-k_2/c_2)(x_3 - x_1) + x_5)) + k_1 * (x_2 - x_1)}{m_2} \end{cases}$$

Linearizzando attorno ai punti di equilibrio $\bar{x} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4] = [\bar{q}, \bar{\theta}, 0, 0]$ precedentemente trovati, si ottiene

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{c_2} & 0 & -\frac{k_2}{c_2} & 0 & 1 \\ -\frac{k_1 + k_2}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & -\frac{c_1}{m_1} & \frac{c_1}{m_1} \\ \frac{k_1 + k_2}{m_2} & -\frac{k_1}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & \frac{c_1}{m_2} & -\frac{c_1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Infine, essendo l'uscita del sistema la posizione della scatola, ovvero $y = q_1$, si ha che

$$y = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] x = Cx$$

Sostituendo i valori numerici assegnati si ottiene

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1.5 & 0 & -1.5 & 0 & 1 \\ -2.25 & 1.5 & 0.75 & -1 & 1 \\ 4.5 & -3 & -1.5 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] x = Cx.$$

La funzione di trasferimento tra l'ingresso F e l'uscita $y = q_1$ diviene

$$G(s) = \frac{(s + 0.75)(s + 3)}{s^2(s + 0.8199)(s^2 + 3.68s + 8.233)},$$

che presenta due radici complesse coniugate a parte reale negativa $\lambda_{1,2} \approx -1.84 \pm 2.20i$, una radice reali negativa $\lambda_3 \approx -0.8199$, e due radici nell'origine $\lambda_{4,5} \approx 0$. Si conclude perciò sulla marginale stabilità del sistema.

C.1 Poiché il sistema non presentando poli instabili, il progetto di un controllore che permetta al sistema complessivo di rispettare le specifiche può essere affrontato direttamente sui diagrammi di Bode. Faremo riferimento allo schema a blocchi di fig. 3 e al progetto di un controllore del tipo

$$C(s) = \frac{K_c}{s^t} C_0(s), \text{ con } C_0(0) \geq 1.$$

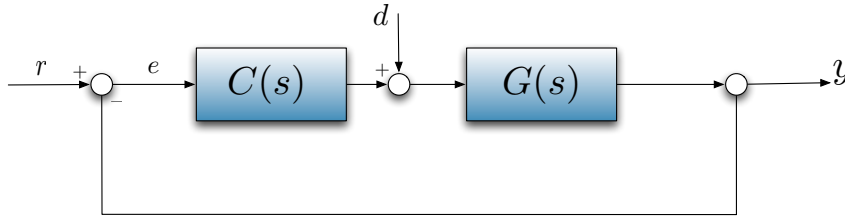


Figura 3: Schema a blocchi di riferimento.

C.1-a La specifica richiede che il contenitore si porti in un tempo non superiore a 0.5 s in una posizione nella quale può essere afferrato da un'attrezzatura di apertura L_p centrata in L_1 . Questo significa che partendo da $q_1 = 0$ la scatola deve portarsi in posizione $\bar{q}_1 = L_1 - b/2 = 1$ con un errore sulla posizione al più pari a $(L_p - b)/2 = 0.02$ m. Osservando che la f.d.t. presenta due poli nell'origine, possiamo concludere che la specifica è automaticamente soddisfatta poichè a regime si avrà $q_1 = \bar{q}$ senza dover intervenire nel controllore ($t = 0$). La specifica richiede inoltre che il contenitore si trovi in posizione $q_1 = \bar{q} \pm 0.02m = \bar{q} \pm 2\%$ entro un tempo non superiore a 0.5s (tempo assestamento al 2% inferiore a 0.5 s) senza urtare un ostacolo posto a distanza L_2 dal punto di partenza. Poichè il contenitore ha una lunghezza pari a b e deve posizionarsi a $\bar{q} = L_1 - b/2$, la sovraelongazione non deve superare $L_2 - (L_1 - b/2) - b = 0.05m = 5\%$.

Tentiamo di esaudire queste specifiche progettando un controllore che permetta di approssimare il sistema in anello chiuso con un modello a due poli dominanti le cui caratteristiche frequenziali siano

$$S = e^{\left(-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}\right)} \Rightarrow \delta = 0.70 \Rightarrow M_\phi \approx 70 \text{ deg},$$

$$\omega_T = \frac{4}{\delta T_a} \Rightarrow \omega_T \approx 11.42 \text{ rad/s}.$$

Il diagramma di Bode con i vincoli sulla pulsazione di taglio ω_T sono riportati in figura 4.

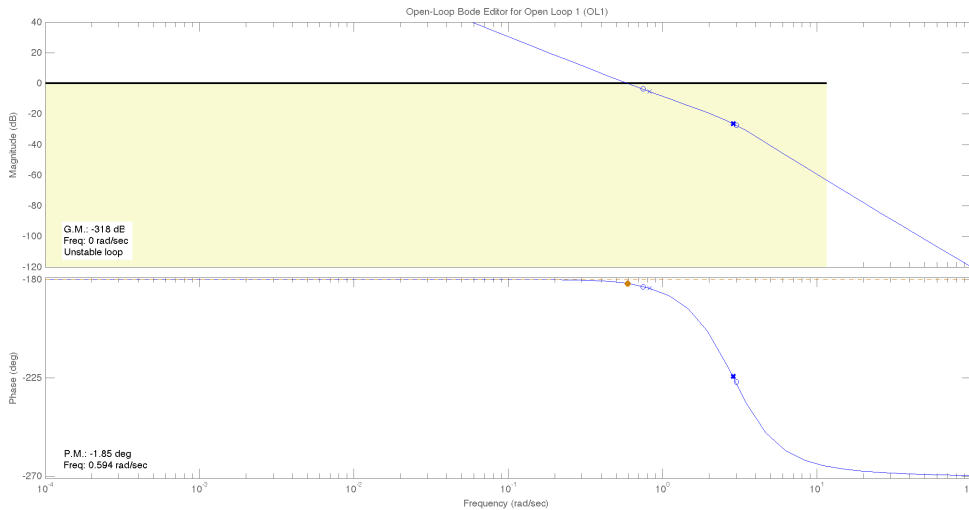


Figura 4: Diagramma di Bode della f.d.t. $G(s)$ con specifica sulla banda passante.

La costante K_c non è fissata dalle specifiche statiche e perciò sarà per adesso lasciato libero. Verrà determinato successivamente per rispettare le altre specifiche.

C.1-b Affinchè l'effetto della componente costante \bar{d} del disturbo d sull'uscita sia completamente annullato è necessario che nella f.d.t. in anello aperto a monte del disturbo sia presente un polo nell'origine. Poichè il controllore nel precedente punto è stato scelto di tipo $t = 0$ è necessario inserire un polo in zero.

Consideriamo adesso la componente sinusoidale del disturbo d e applichiamo il teorema della risposta armonica. La funzione di trasferimento tra il disturbo di attuazione d e l'uscita y del sistema è data da

$$Y(j\omega) = \frac{G_d}{1 + C(j\omega)G(j\omega)} D = \bar{G}(j\omega) D(j\omega),$$

perciò,

$$y(t) = |\bar{G}(j\omega) F_d| \sin(\omega_d t + \angle \bar{G}(j\omega)).$$

Questa specifica è equivalente a richiedere che, per pulsazioni $\omega \leq 0.1$ rad/s, si abbia $|y(t)| < 5$ mm. Facendo riferimento al caso peggiore, ovvero considerando la valutazione cautelativa $\sin(\omega_k t + \angle \bar{G}(j\omega)) = 1$, si ottiene

$$|C(j\omega)| \geq \frac{\sum_{k=1}^3 \frac{1}{3(k+20)}}{0.005} \leq \frac{GD}{1 + CG} \leq 0.005 = 20dB.$$

Essendo $|G(j\omega_d)| = 30dB$, il diagramma di $C(s)G(s)$ dovrà rimanere al di sopra della semiretta di pendenza $-40dB$ per decade che passa per il punto $\omega_d = 0.1rad/s$,

$$|C(j\omega_d)G(j\omega_d)| = 50dB$$

Le limitazioni relative a questa specifica sono riportate in figura 5.

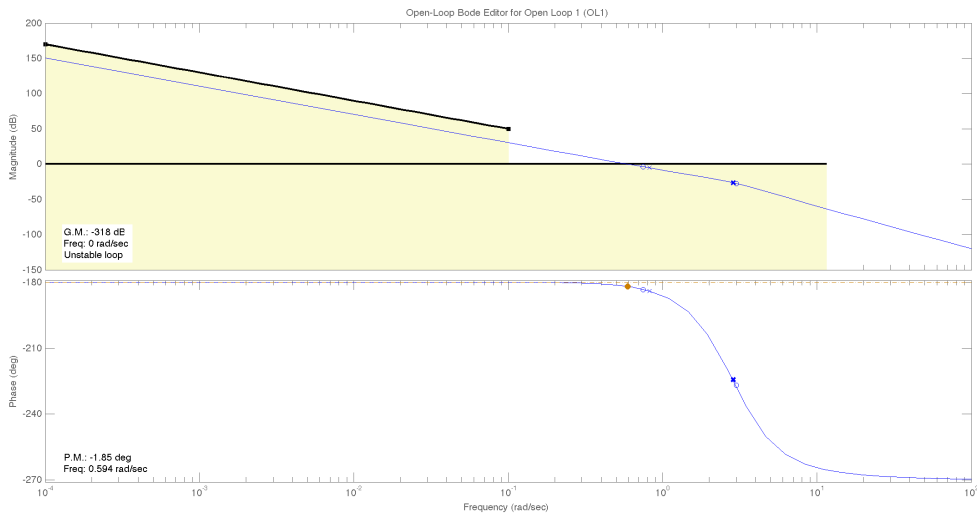


Figura 5: Diagramma di Bode della f.d.t. $G_2(s)$ con le specifiche di progetto.

Progetto del controllore.

Una possibile scelta per il controllore $C(s)$ in grado di rispettare tutte le specifiche proposte consiste in uno zero in -0.4 , necessario per avere un attraversamento dell'asse a 0 dB con la giusta pendenza e oltre la pulsazione di taglio precedentemente calcolata, una rete anticipatrice complessa con zeri in $z_{1,2} = -1.15 \pm 0.5i$ e poli in $p_{1,2} = -200 \pm 80i$, per avere il giusto margine di fase e un polo nell'origine per la specifica sul disturbo di attuazione. La f.d.t. del controllore scelto è

$$C(s) = \frac{1844197.1383(s + 0.4)(s^2 + 2.3s + 1.572)}{s(s^2 + 400s + 4.64e04)}.$$

Il diagramma di Bode della funzione di trasferimento in anello aperto è riportato in fig. 6. In fig. 7 è riportato il diagramma di Bode del sistema controllato. In fig. 8 è invece riportata la risposta ad un ingresso a gradino del sistema controllato.

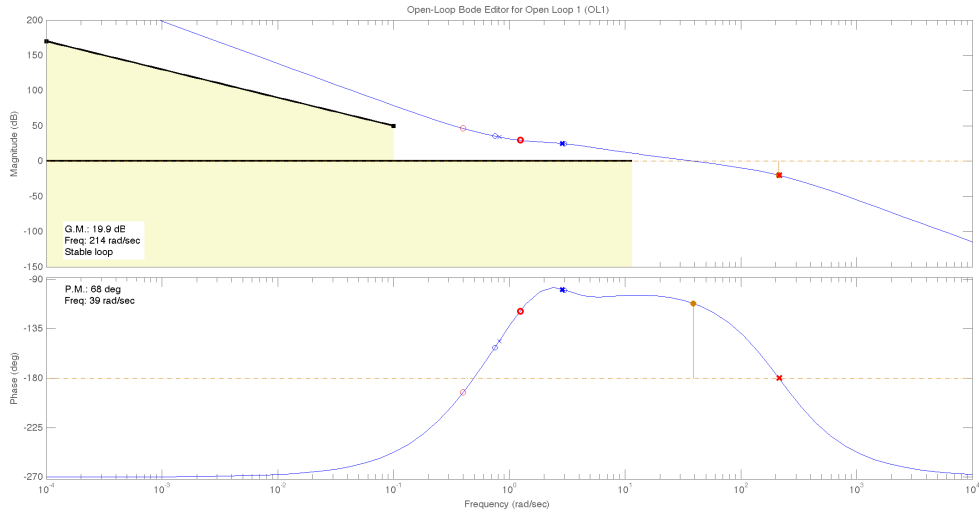


Figura 6: Diagramma di Bode risultante dal progetto della f.d.t. d'anello $C_2(s)G_2(s)$.

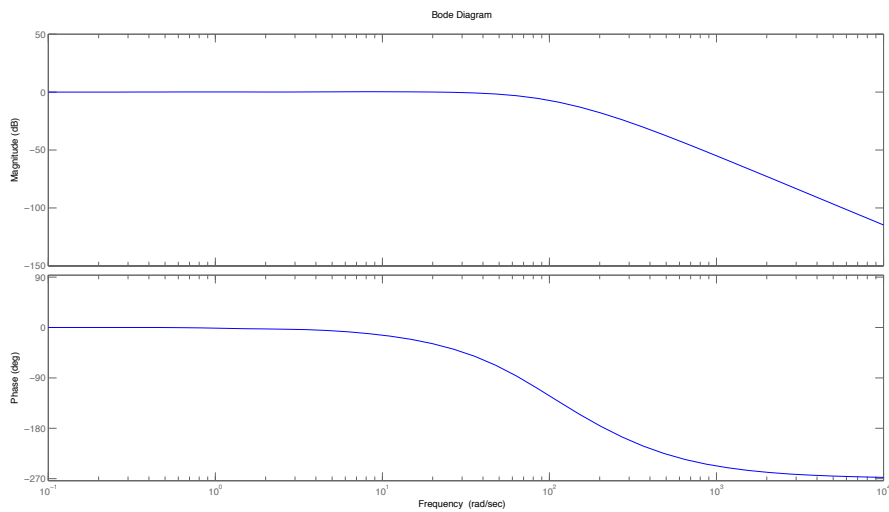


Figura 7: Diagramma di Bode del sistema controllato.

Esercizio 2.

La funzione di trasferimento tra l'ingresso e l'uscita risulta

$$G_c(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)R(s)G(s)}.$$

A.2 Sostituendo i valori assegnati si ottiene

$$G_c(s) = \frac{K(s+2)(s+7)}{s^3 + (11+K)s^2 + (31+8K)s + (21+12K)}.$$

Per studiare i valori di K per i quali il sistema in ciclo chiuso è stabile è possibile applicare il criterio

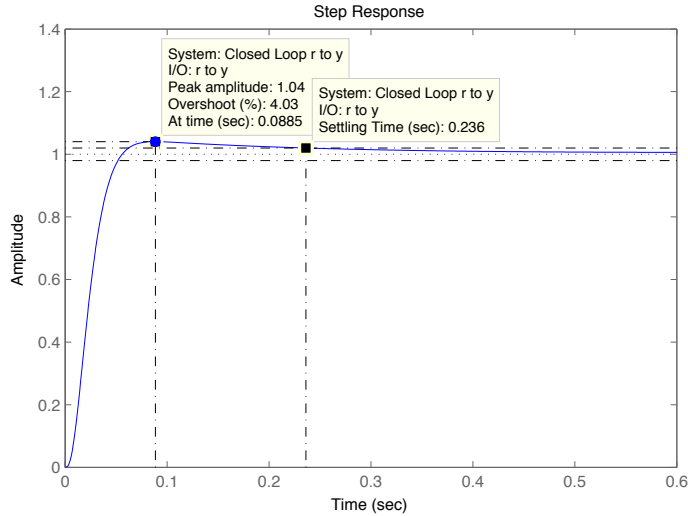


Figura 8: Risposta al gradino del sistema controllato.

di Routh. Costruiamo la tabella

$$\begin{array}{cc} 1 & 31 + 8K \\ 11 + K & 21 + 12K \\ \frac{8K^2 + 107K + 320}{11 + K} & \\ 21 + 12K & \end{array}$$

Affinchè il sistema sia asintoticamente stabile occorre che gli elementi della prima riga siano tutti dello stesso segno. Quindi abbiamo

$$\begin{cases} K > -11 \\ K > -\frac{21}{12} \\ -11 < K < -\frac{1}{16}(-107 - \sqrt{1209}) \cup K > \frac{1}{16}(-107 + \sqrt{1209}) \end{cases}$$

ovvero, per valori $K > -1.75$ il sistema in ciclo chiuso è asintoticamente stabile.

2.2 Si può procedere ancora una volta utilizzando il criterio di Routh al polinomio a denominatore della f.d.t. dell'anello chiuso, considerando K fissato nel range di valori di cui al punto precedente. La f.d.t. in anello chiuso è data da

$$G_c(s) = \frac{K(s+2)}{(s+1)(s+3)(s+p) + K(s+2)(s+6)} = \frac{K(s+2)}{s^3 + (4+K+p)s^2 + (3+8K+4p)s + 12K+3p}$$

La tabella di Routh diviene

$$\begin{array}{cc} 1 & 3 + 8K + 4p \\ 4 + K + p & 12K + 3p \\ \frac{8K^2 + 4(1+p)(3+p) + K(23+12p)}{4+K+p} & \\ 12K + 3p & \end{array}$$

Scegliendo $K = 1$, ad esempio, si osserva che per variazioni di p nel range indicato (7 ± 1) , il sistema risulta asintoticamente stabile in quanto gli elementi della prima colonna sono tutti positivi. Alternativamente, si sarebbe potuto utilizzare il criterio di Kharitonov, verificando che le radici dei 4 polinomi angolari siano tutte a parte reale negativa.