

Esercizio 1.

Si consideri il sistema idraulico rappresentato in figura 1. Esso è costituito da quattro serbatoi connessi in cascata mediante un sistema di chiuse attivate ad intervalli di tempo regolari e pari ad un giorno. Il serbatoio i -esimo è caratterizzato dall'altezza del battente idrico x_i .

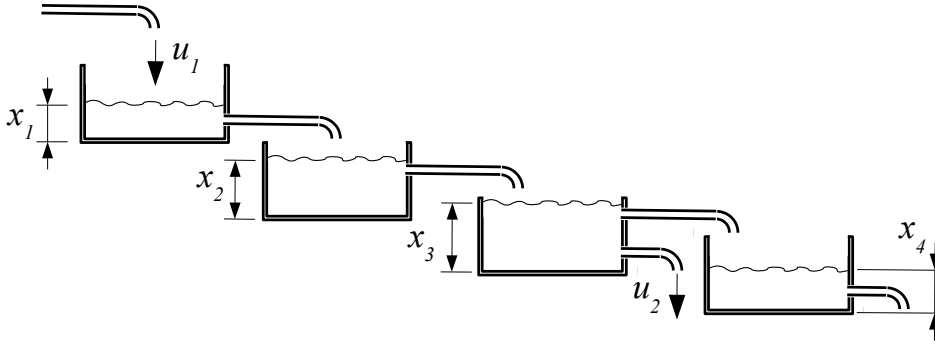


Figura 1: Schema del sistema idraulico.

Indicando con u_1 e u_2 le portate regolabili rispettivamente in ingresso al serbatoio 1 e in uscita dal serbatoio 3, la dinamica del sistema al k -esimo giorno è

$$\begin{aligned}
 x_1(k+1) &= (1 - \alpha) x_1(k) + u_1(k) \\
 x_2(k+1) &= \alpha x_1(k) + (1 - \beta) x_2(k) \\
 x_3(k+1) &= \beta x_2(k) + (1 - \gamma) x_3(k) - u_2(k) \\
 x_4(k+1) &= \gamma x_3(k) + (1 - \delta) x_4(k)
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

I coefficienti α , β e γ determinano le portate fluenti lungo i vari condotti rispettivamente dal serbatoio 1 al serbatoio 2, dal serbatoio 2 al serbatoio 3 ed infine dal serbatoio 3 al serbatoio 4. δ rappresenta invece una fuoriuscita di materiale dal serbatoio 4.

A.1 Si determinino tutti gli equilibri del sistema corrispondenti a ingressi costanti.

Si considerino i seguenti valori numerici: $\alpha = 0.2$; $\beta = 0.3$; $\gamma = 0.4$; $\delta = 0.5$.

B.1) A partire da condizioni iniziali tali per cui i serbatoi sono tutti vuoti, si desidera portare e mantenere il sistema al valore di equilibrio in cui il livello dell'ultimo serbatoio sia pari ad 1 m e quello del serbatoio 2 pari al triplo.

b1.1) Si discuta il minimo numero di giorni necessari allo scopo, nell'ipotesi che gli ingressi possano assumere valori arbitrari.

b1.2) Si calcoli una sequenza di ingressi che garantisca il risultato desiderato.

b1.3) Si effettui una simulazione del sistema in ambiente **Simulink**;

C.1) Si supponga di poter misurare l'altezza dell'ultimo serbatoio: è possibile risalire all'altezza di tutti gli altri serbatoi?

D.1) Si progetti un compensatore che, a partire dalla condizione in cui tutti i serbatoi sono vuoti ed utilizzando la misura del livello dell'ultimo serbatoio, permetta di controllare le portate in ingresso in maniera tale da portare il livello dell'ultimo serbatoio al valore di equilibrio in tempi inferiori rispetto al caso in anello aperto. Si effettui poi una simulazione in ambiente **Simulink** del sistema tempo discreto con il compensatore appena progettato verificando il soddisfacimento della specifica temporale.

E.1) Si consideri adesso il caso in cui le portate regolabili possono essere solo positive. Si descriva il problema come un problema di minimi quadrati vincolati.

e1.1) Si utilizzi un opportuno algoritmo numerico per la soluzione del problema discutendo il minimo numero di giorni necessario a raggiungere l'equilibrio in queste condizioni.

Esercizio 2.

Si consideri il seguente sistema non lineare

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2x_2^2 - x_1^3 - x_1 \\ \dot{x}_2 &= -2x_1^3 x_2 + u.\end{aligned}\tag{2}$$

A.2 Si studi la stabilità dell'equilibrio dell'origine con ingresso $u = 0$. Se necessario si utilizzi la seguente funzione candidata di Lyapunov $V(x_1, x_2) = x_1^4 + 2x_2^2$;

B.2 Si consideri adesso un ingresso $u = k_1 x_1 + k_2 x_2$, ovvero una retroazione statica dello stato. Si determinino, se esistono, i valori delle costanti di retroazione k_1 e k_2 che rendano l'equilibrio nell'origine almeno localmente asintoticamente stabile.

Soluzione

Esercizio 1.

A.1) Per un sistema tempo discreto l'equilibrio è caratterizzato da $x_{k+1} = x_k$. Infatti, detto T l'intervallo di tempo tra due campioni, se tale condizione è verificata per due generici periodi consecutivi Tk e $T(k+1)$, lo sarà anche per ogni periodo maggiore di $T(k+1)$. Si ottiene

$$(I - A)\bar{x}_k = B\bar{u}_k \quad \Rightarrow \quad [(I - A) | B] \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \bar{u}_k \end{bmatrix} = 0.$$

L'equilibrio del sistema, inteso come vettore $[\bar{x}_k \ \bar{u}_k]^T$, è dato quindi dal nullo della matrice $[(I - A) | B]$, ovvero come soluzione del seguente sistema di 4 equazioni in 6 incognite,

$$\begin{cases} \bar{x}_1(k) = \frac{\bar{u}_1(k)}{\alpha} \\ \bar{x}_2(k) = \frac{\alpha}{\beta} \bar{x}_1(k) \\ \bar{x}_3(k) = \frac{\beta}{\gamma} \bar{x}_2(k) - \frac{\bar{u}_2(k)}{\gamma} \\ \bar{x}_4(k) = \frac{\gamma}{\delta} \bar{x}_3(k). \end{cases} \quad (3)$$

Una base del nullo di $[(I - A) | B]$ avrà quindi dimensione 2.

B.1) L'equilibrio \bar{x} corrispondente a $\bar{x}_4 = 1$ e $\bar{x}_2 = 3$ è caratterizzato da $\bar{x}_1 = 4.5$, $\bar{x}_3 = 1.25$, $\bar{u}_1 = 0.9$ e $\bar{u}_2 = 0.4$ e può essere trovato per diretta sostituzione nel sistema di equazioni (3).

b1.1) Il minimo numero di giorni necessari a garantire il raggiungimento di un generico stato x è pari a 2. Infatti, la matrice di raggiungibilità in due passi

$$R_2 = [B \ AB] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -0.6 \\ 0 & 0 & 0 & -0.4 \end{bmatrix}$$

ha già rango massimo pari a 4. Poichè il sistema deve essere portato e mantenuto al valore di equilibrio, il numero minimo di giorni necessario è in realtà pari a $p = 3$. In effetti, affinché lo stato desiderato sia anche mantenuto è necessario che esso sia di equilibrio per il sistema, eventualmente con opportuni ingressi. Il raggiungimento di uno stato mediante opportuna legge di controllo in generale non garantisce che il sistema si mantenga in tale stato per un tempo indefinito.

b1.2) Per ottenere tale risultato si può procedere imponendo che il valore dello stato al passo k , ovvero l'equilibrio calcolato precedentemente, coincida con quello al passo $k - 1$, ovvero

$$\begin{bmatrix} x(k-1) \\ x(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{p-1}x(0) \\ A^p x(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B & AB & A^2B & \dots & A^{p-2}B \\ B & AB & A^2B & \dots & A^{p-2}B & A^{p-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(p-1) \\ u(p-2) \\ \vdots \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix},$$

dove $x(0)$ è la condizione iniziale, pari a zero nel caso in esame. Ogni elemento della sequenza degli ingressi è un vettore costituito dai valori di entrambi gli ingressi al passo k -esimo. La sequenza di controlli u in grado di risolvere tale sistema garantisce anche che il sistema idraulico rimanga nella nuova configurazione desiderata per un tempo indefinito. Tale soluzione si ottiene come

$$\begin{bmatrix} u(2) \\ \vdots \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} = \bar{R}_p^\dagger \left(\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{x} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A^{p-1}x(0) \\ A^p x(0) \end{bmatrix} \right)$$

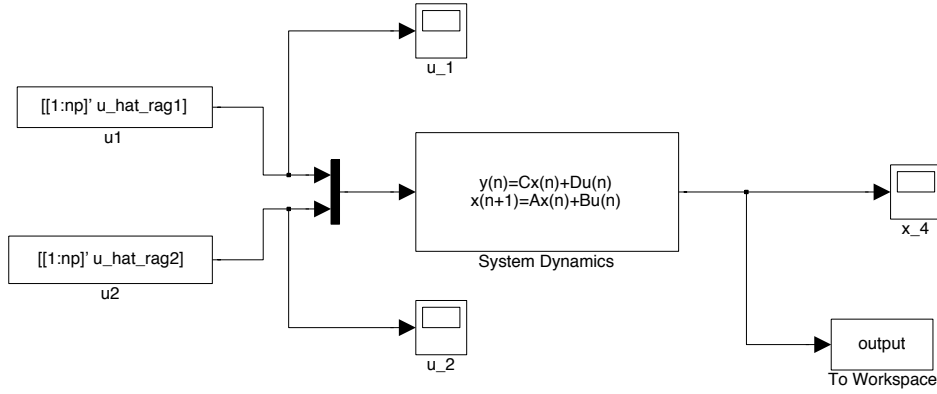
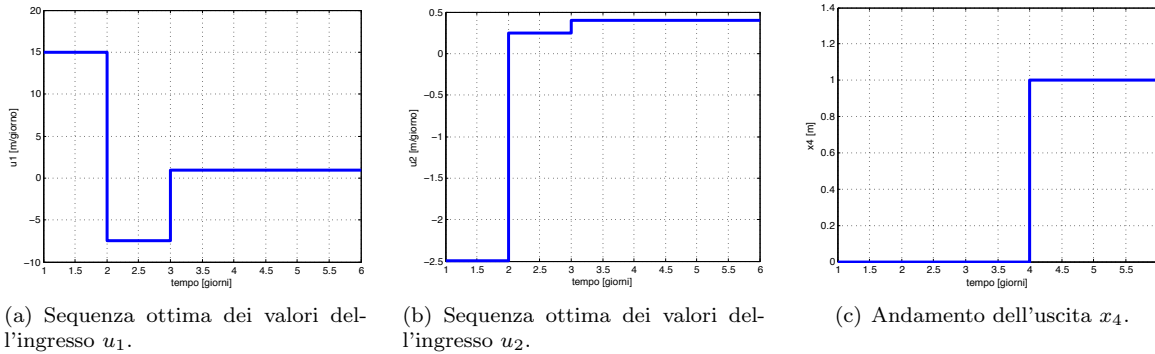


Figura 2: Schema Simulink del sistema tempo discreto con la sequenza di controllo calcolata al punto b1.2.



(a) Sequenza ottima dei valori dell'ingresso u_1 .

(b) Sequenza ottima dei valori dell'ingresso u_2 .

(c) Andamento dell'uscita x_4 .

Figura 3: Andamento degli ingressi ottimi e dell a corrispondente uscita.

dove,

$$\bar{R}_p = \begin{bmatrix} 0 & B & AB \\ B & AB & A^2B \end{bmatrix}.$$

Sostituendo i valori numerici otteniamo: $u_1 = [u_1(0) \ u_1(1) \ u_1(2)]^T = [15 \ -7.5 \ 0.9]^T$ e $u_2 = [u_2(0) \ u_2(1) \ u_2(2)]^T = [-2.5 \ 0.25 \ 0.4]^T$. Si noti come gli ultimi due valori della sequenza degli ingressi coincidano con i valori all'equilibrio.

b1.3) In figura 2 è riportato lo schema Simulink utilizzato per simulare l'evoluzione del sistema tempo discreto con gli ingressi calcolati al punto precedente. In figura 3 sono invece riportati gli andamenti dei controlli u_1 e u_2 e della variabile di uscita x_4 .

C.1) Affinchè sia possibile risalire all'altezza di tutti i serbatoi a partire dalla sola misura di x_4 , è necessario che il sistema sia completamente osservabile. La matrice di osservabilità è

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.5 \\ 0 & 0.12 & 0.44 & 0.25 \\ 0.024 & 0.216 & 0.364 & 0.125 \end{bmatrix}$$

che ha rango pieno. È perciò possibile risalire all'altezza di tutti gli altri serbatoi a partire dalla sola misura di x_4 .

D.1) Gli autovalori del sistema tempo discreto sono in $p = [0.5, 0.6, 0.7, 0.8]^T$. Per ottenere prestazioni migliori si può decidere di spostarli all'interno della circonferenza di raggio 0.5, ad esempio in $pc = 0.5 p = [0.25 \ 0.3 \ 0.35 \ 0.4]^T$.

Per la determinazione della matrice di retroazione degli stati si usa come di consueto il comando `place` di Matlab che fornisce automaticamente la matrice di retroazione:

$$K = \begin{bmatrix} 0.8032 & 0.6060 & -0.0195 & -0.0085 \\ 0.0161 & -0.2702 & -0.4968 & -0.0924 \end{bmatrix}.$$

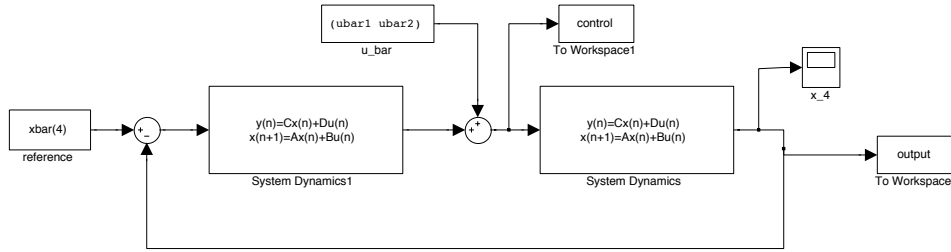
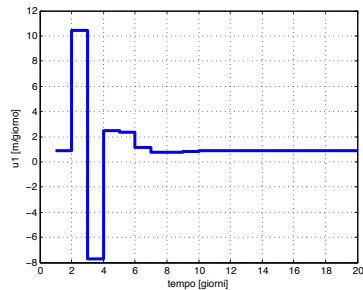
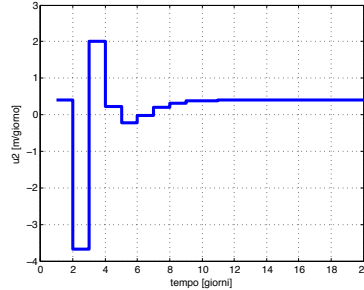


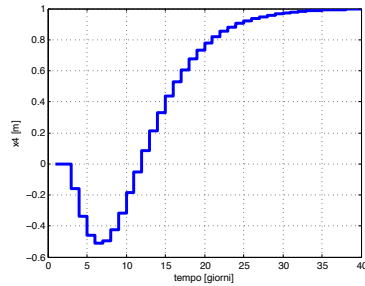
Figura 4: Schema Simulink del sistema tempo discreto con il compensatore progettato al punto D.1.



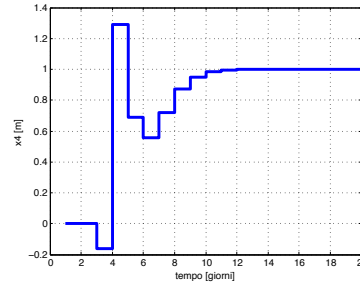
(a) Sequenza ottima dei valori dell'ingresso u_1 in uscita dal compensatore.



(b) Sequenza ottima dei valori dell'ingresso u_2 uscita dal compensatore.



(c) Andamento dell'uscita x_4 in anello aperto.



(d) Andamento dell'uscita x_4 in anello chiuso con il compensatore progettato.

Figura 5: Andamento degli ingressi in uscita dal compensatore e della corrispondente uscita ottenuti sia in anello aperto che con lo schema di figura 4.

Poichè non si ha accesso a tutte le variabili di stato ma il sistema risulta completamente osservabile a partire dalla misura di x_4 , si può realizzare un osservatore di Luenberger per ricostruire lo stato. La matrice L di iniezione delle uscite è calcolata in modo che la matrice dinamica dello stimatore $A - LC$, abbia autovalori in $q = 0.5p$. Impiegando il comando `Matlab`, $L = \text{transpose}(\text{place}(A', C', q))$ si ottiene:

$$L = \begin{bmatrix} 6.8555 \\ 6.7930 \\ 4.3547 \\ 1.9500 \end{bmatrix}.$$

Il compensatore basato sul regolatore appena progettato ha dinamica $K(sI - A + BK + LC)^{-1}L$, e si costruisce con il comando `rsys = ss(A-B*K-L*C,L,K,0)` ovvero, a meno di un segno, con `rsys = reg(Sys,K,L)`, ove `Sys = ss(A,B,C,0)`.

In figura 4 è riportato lo schema Simulink utilizzato per la simulazione del sistema chiuso in retroazione con il compensatore mentre in figura 5 sono riportati gli andamenti dei controlli e dell'uscita. Si noti che l'uscita x_4 raggiunge il valore di regime in tempi inferiori in anello chiuso (figura 5(d)) rispetto al caso in anello aperto (figura 5(c)).

E.1) Per il sistema preso in considerazione i valori che i controlli possono assumere sono di fatto solo positivi, ovvero può essere immesso materiale nel sistema ma non estratto. A differenza di quanto fatto in precedenza, una pianificazione ottima in tal caso richiede anche un vincolo sul controllo ad assumere valori solo positivi. In tali situazioni è utile formulare un problema di ottimizzazione che prevede esplicitamente dei vincoli sul valore massimo e minimo dei segnali di controllo. Purtroppo non possiamo più fare ricorso alla soluzione mediante pseudoinversa della matrice di raggiungibilità, ma dobbiamo risolvere un nuovo problema di ottimizzazione vincolata:

$$\min_u \|u\|_2 \quad (4)$$

soggetto a:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$

$$x_0 = \bar{x}_0$$

$$x_p = \bar{x}_t$$

$$l_b \leq u_k \leq u_b.$$

dove l_b e u_b sono i limiti massimi inferiore e superiore ammissibili per i segnali di controllo ad ogni passo. Si porrà in tal caso $l_b = 0$.

e1.1) Questo problema appartiene alla classe dei problemi di minimi quadrati vincolati e può essere risolto per numero di passi crescente a partire dal minimo necessario per raggiungere \bar{x} da $x(0)$. Per un valore fissato p di passi si risolve il problema di minimo vincolato (4) nell'incognita u , se tale soluzione non soddisfa i vincoli sul controllo si incrementa p e si ripete l'ottimizzazione. In questo modo si ottiene una soluzione ottima anche rispetto al numero di passi. Il precedente problema si riformula in modo compatto come segue:

$$\min_u \|u\|_2 \quad (5)$$

soggetto a:

$$\bar{x} - A^p x(0) = R_p u$$

$$0 \leq u_k \leq u_b,$$

con $u = [u_{p-1} \ \dots \ u_0]^T$. Questo tipo di problema non può essere facilmente risolto come il precedente, ma richiede strumenti di calcolo numerico più complessi. **Matlab** mette a disposizione la funzione **lsqlin** per risolvere problemi ai minimi quadrati vincolati. Questa funzione risolve problemi anche molto più complessi rispetto a quello che desideriamo risolvere in questo paragrafo, vale a dire problemi ai minimi quadrati della forma:

$$\min_u \|Cu - d\|_2^2 \quad \text{soggetto a:} \quad \begin{aligned} A \cdot u &\leq b \\ A_{eq} \cdot u &= b_{eq} \\ l_b &\leq u \leq u_b, \end{aligned}$$

dove C , A e A_{eq} sono matrici mentre d , b , b_{eq} , l_b , u_b e x sono vettori.

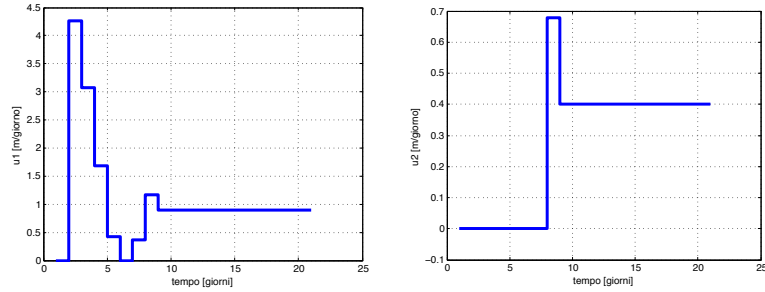
Di seguito è riportato il codice **Matlab** utilizzato per calcolare la sequenza ottima ottenuta con $p = 8$, numero di passi minimo affinché il problema ammetta una soluzione. Il valore massimo u_b del controllo è stato fissato pari a 10.

```
p=8;
Rnp=B;
for i=2:p
    Rnp=[B, A*Rnp]; % Matrice di Raggiungibilita' in p passi
end

% Matrici del costo.
C1= eye(2*p); d1=zeros(2*p,1);

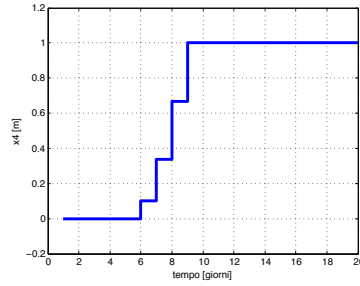
% Matrici dei vincoli di disuguaglianza
A1=zeros(2*p,2*p); b1=zeros(2*p,1);

% Matrici dei vincoli di uguaglianza
Aeq1 = [zeros(size(B)) Rp(:,1:end-size(B,2))]; Rp];
beq1o=xbar-A^(p-1)*x0; beq1=xbar-A^p*x0;
beq1=[beq1o;beq1];
```



(a) Sequenza ottima dei valori dell'ingresso u_1 in $p = 8$ passi.

(b) Sequenza ottima dei valori dell'ingresso u_2 in $p = 8$ passi.



(c) Andamento dell'uscita x_4 in anello chiuso con il compensatore progettato.

Figura 6: Sequenza ottima degli ingressi soluzione del problema di ottimo vincolato in $p = 8$ passi e andamento della relativa uscita.

```

% Vincoli sul controllo
lb1=zeros(2*p,1); ub1=10*ones(2*p,1);

% Sequenza ottima
uhat = lsqlin(C1,d1,A1,b1,Aeq1,beq1,lb1,ub1);

```

In figura 6 è riportato l'andamento dell'uscita x_4 in seguito all'applicazione della sequenza di controllo ottima vincolata calcolata con il comando `lsqlin` di `Matlab`. La simulazione è stata ottenuta con lo schema `Simulink` riportato in figura 2. Si noti come tutti i valori assunti dai controlli sono maggiori o uguali a zero.

Esercizio 2.

A.2) L'origine è un punto di equilibrio del sistema per $u = 0$. Al fine di analizzarne le proprietà di stabilità, si consideri il linearizzato approssimato nell'intorno dell'origine. Si ottiene

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poichè uno degli autovalori è sull'asse immaginario, non si può concludere nulla con il metodo indiretto di Lyapunov. Consideriamo quindi la funzione candidata di Lyapunov suggerita nel testo, $V(x_1, x_2) = x_1^4 + 2x_2^2$, e, derivandola rispetto al tempo e sostituendo la dinamica del sistema con $u = 0$, si ottiene

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -4x_1^3(1 + x_1^2)$$

che è semidefinita negativa. L'insieme dei punti per cui $\dot{V} = 0$ è dato da $R_o = \{x_1 = 0, x_2 \in \mathbb{R}\}$. Gli insiemi invarianti in R_o , ottenuti per sostituzione nella dinamica del sistema delle condizioni che definiscono R_o stesso, si riducono alla sola origine e, quindi per il Teorema di Krasovskii-Lasalle, l'equilibrio è asintoticamente stabile. Inoltre, poichè V è radialmente illimitata si può concludere sulla globale asintotica stabilità dell'origine.

B.2) Sostituendo l'ingresso nella dinamica del sistema e procedendo alla linearizzazione nell'intorno dell'origine, si ottiene

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix},$$

da cui si deduce facilmente che l'origine è localmente asintoticamente stabile per $k_2 < 0$ e $\forall k_1 \in \mathbb{R}$.