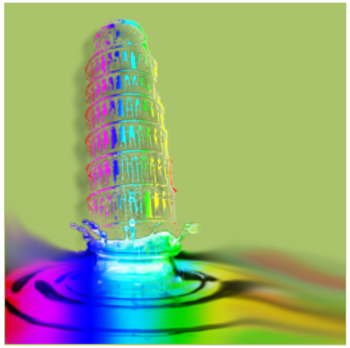
# Introduzione elementare al metodo degli Elementi Finiti



carmelo.demaria@centropiaggio.unipi.it

# Obiettivi

- Introduzione elementare al metodo degli elementi finiti
  - Analisi Termica
  - Analisi Strutturale
  - Analisi Fluidodinamica
- Utilizzo del software COMSOL 3.5

# Un po' di "filosofia"

Come avviene anche in altri settori di ricerca, la modellistica di per sé non è un'attività esclusivamente scientifica, anche se, naturalmente vi sono concetti universali che essa deve riprodurre, quali ad esempio la conservazione di massa e energia di un fluido, del momento d'inerzia di una struttura, [...],

vi è in effetti anche una componente *artistica* dietro una simulazione di successo, che deriva dal **sapere quali domande ha senso porre**, quale livello di *dettaglio* ha senso mettere nelle diverse componenti del modello, quali *semplificazioni* apportare in modo da favorire una sua integrazione con modelli diversi.

Alfio Quarteroni

# Analisi agli elementi finiti

- Metodo per la risoluzione **numerica** di una equazione differenziale, sia essa alle derivate totali o parziali
- Più precisamente si tratta di un metodo per approssimare una equazione differenziale con un sistema di equazioni algebriche

# Terminologia

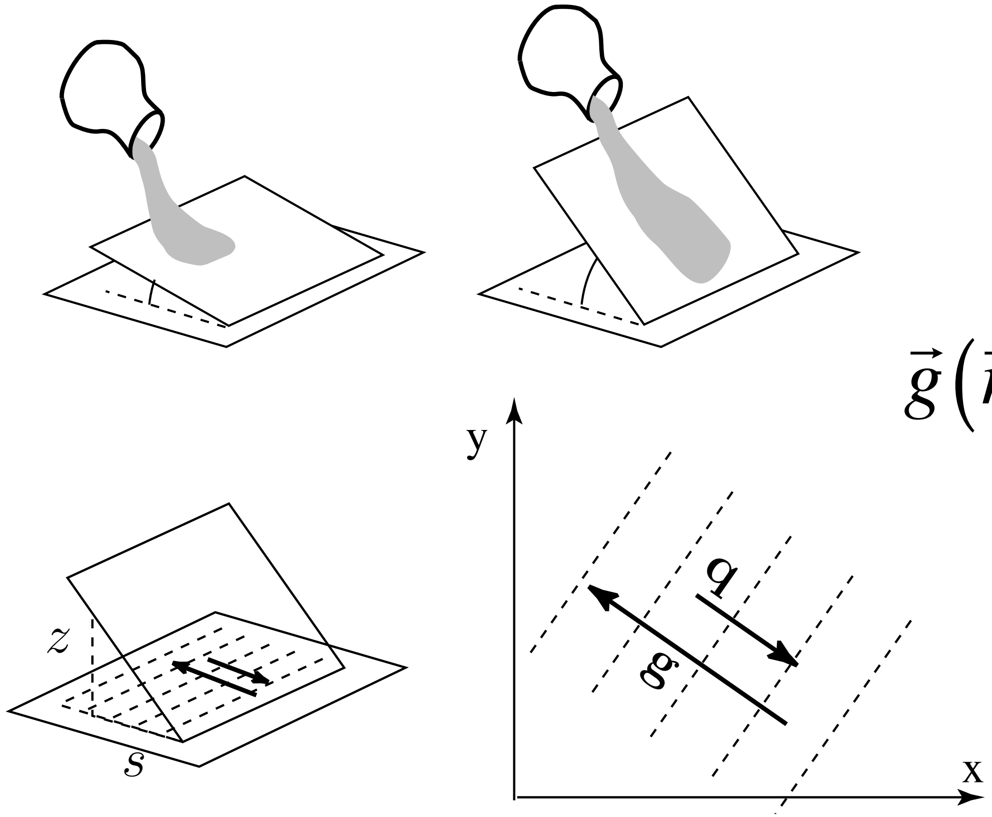
- Campo fisico (termico, elastico, fluidodinamico)
  - Stazionario
  - Statico
  - Variabile
  - Leggi (*equazioni differenziali*)
- Sorgenti
  - Interne
  - Esterne (*condizioni al contorno*)
- Potenziale del campo (*problema fondamentale*)

# Problema fondamentale

- Assegnata la regione entro la quale si vuole considerare il campo
- Assegnato l'intervallo di tempo entro il quale si vuole considerare il campo
- Precisata la natura dei materiali contenuti entro la regione
- Assegnate la posizione e l'intensità delle sorgenti
- Precisate le condizioni al contorno della regione
- **Determinare in *ogni* punto ed in *ogni* istante i potenziali del campo**

# Nozioni preliminari (1/4)

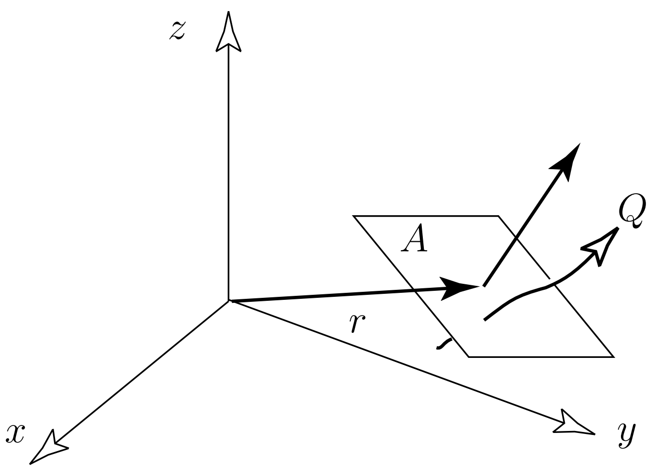
- Gradiente di uno scalare

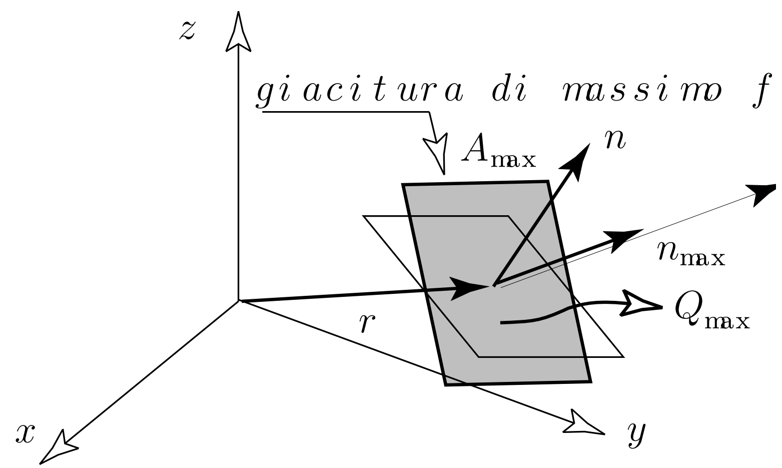



$$\vec{g}\left(\vec{r}\right) = \frac{\partial T}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{k}$$

# Nozioni preliminari (2/4)

- Densità di flusso

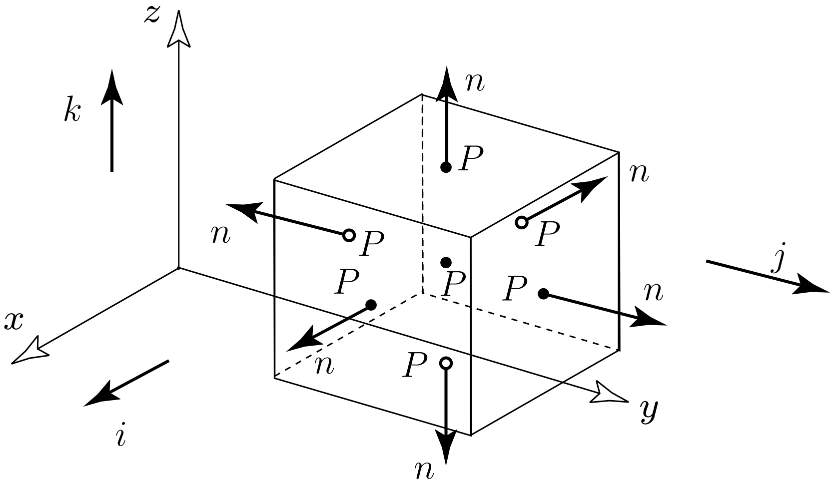



$$\vec{q}(\vec{r}) = \lim_{A \longrightarrow 0} \left( \frac{Q}{A} \right)_{max} \vec{n}_{max}.$$

# Nozioni preliminari (3/4)

- Divergenza di un vettore




$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{q}$$

# Nozioni preliminari (4/4)

- Operatore vettoriale nabla

$$\nabla = +\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

- Quindi il gradiente diventa

$$\text{grad}\, u = \left[\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right] u = \nabla\, u$$

- E la divergenza diventa

$$\text{div}\ \vec{q} = \left[+\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right] \cdot [q_x\,\vec{i} + q_y\,\vec{j} + q_z\,\vec{k}] = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = \nabla \cdot\, \vec{q}$$

# ANALISI TERMICA

# Prima equazione costitutiva

- la quantità di calore che transita attraverso un elemento di superficie piana tangente ad una superficie isoterma per unità di area e per unità di tempo è proporzionale al salto di temperatura per unità di lunghezza misurato perpendicolarmente alla superficie

$$\vec{q} = -k\,\vec{g}.$$

# Seconda equazione costitutiva

- Incremento dell'energia interna legato all'aumento della temperatura.

$$\mathrm{d}_t u = \rho c \, \mathrm{d}_t T$$

# Equazione di Bilancio

- calore generato =
  calore accumulato + calore uscente

$$Q_{gen} = Q_{acc} + Q_{usc}$$

$$\sigma = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}.$$

# Equazione fondamentale

$$\rho\, c \frac{\partial T}{\partial t} - k\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right] = \sigma.$$

$$\Rightarrow \quad \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot k \nabla T = \sigma$$

$$\Rightarrow \quad \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - k \nabla^2 T = \sigma$$

$$\Rightarrow \quad \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - k \Delta T = \sigma$$

# I tre casi

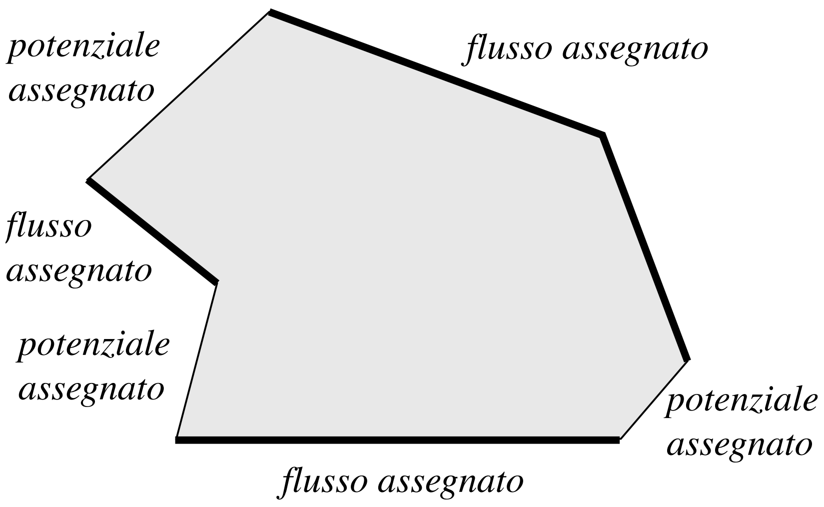
$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - k\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right] = 0 \qquad \textit{Fourier}$$

$$-k\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right] = \sigma \qquad \textit{Poisson}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \qquad \textit{Laplace}$$

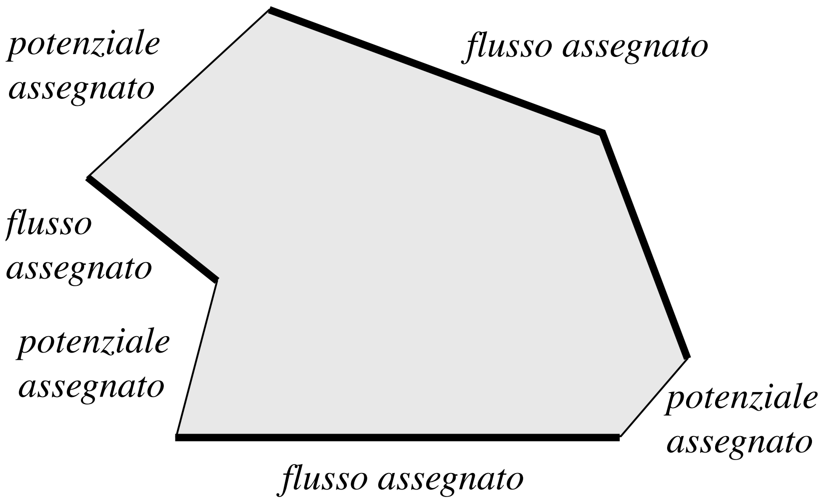
# Condizioni al contorno 1/3

$$-k\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]= \sigma$$



# Condizioni al contorno 2/3

$$\begin{cases} -k\,\nabla^2 u(x,y) &= \sigma(x,y) \\ u(x,y) &= \textit{assegnata su una parte del contorno} \\ -k\,\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial n} &= \textit{assegnata sulla parte rimanente del contorno} \end{cases}$$



# Condizioni al contorno 3/3

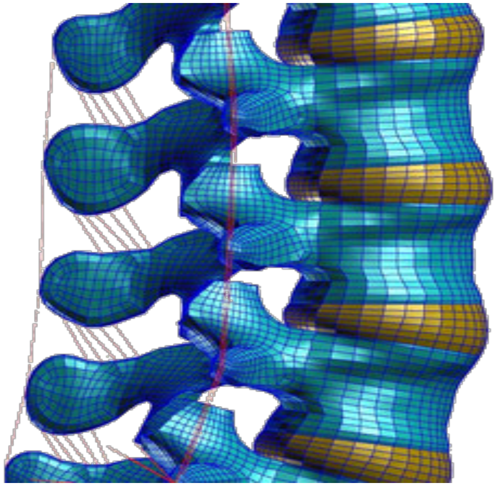
$$\begin{cases} \text{problema di Dirichlet} \\ -k\,\Delta u = \sigma \\ u|_{\partial\Omega} = assegnato \end{cases}$$

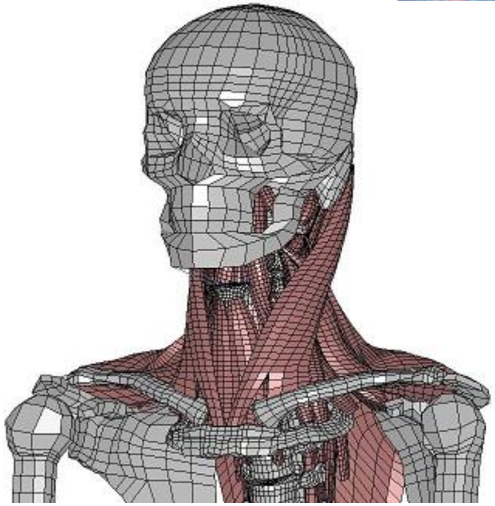
$$\begin{cases} \text{problema di Neumann} \\ -k\,\Delta u = \sigma \\ -k \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = assegnato \end{cases}$$

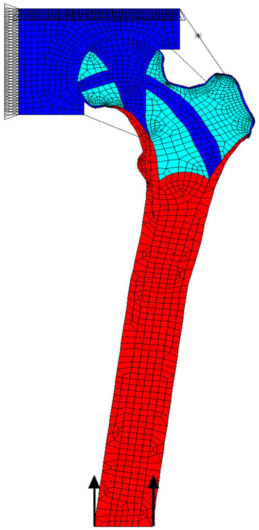
$$\begin{cases} \text{problema misto} \\ -k\,\Delta u = \sigma \\ u|_A = assegnato \\ -k \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_B = assegnato \\ A \cup B = \partial\Omega \end{cases}$$

# Analisi agli elementi finiti

- Elementi
- Nodi
- Funzioni Forma
- Gradi di libertà



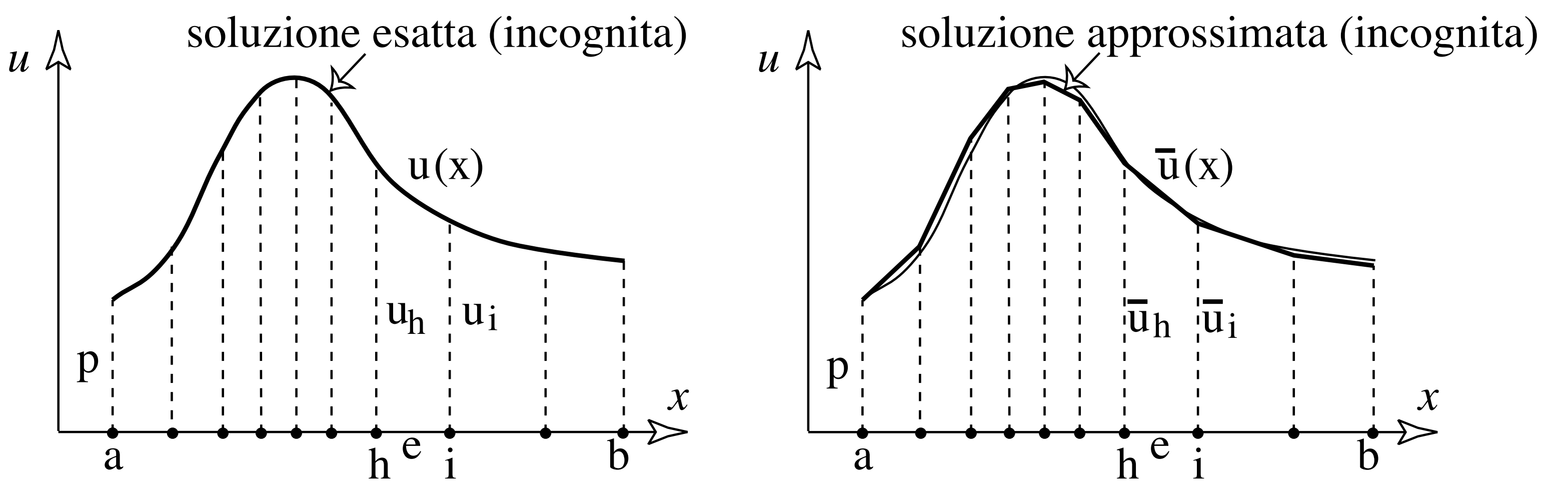




# Analisi agli elementi finiti

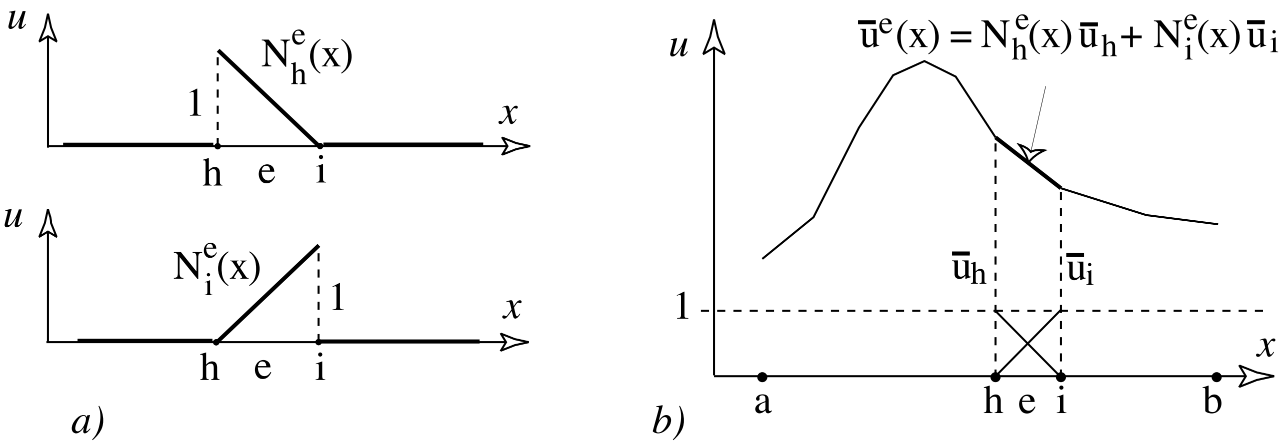
- Il FEM è un metodo numerico (pertanto approssimato) che permette la risoluzione di equazioni differenziali alle derivate parziali.
- Il metodo degli elementi finiti consiste nella *discretizzazione* di un assegnato dominio in ***elementi*** fra loro connessi in un numero ***finito*** di punti (***nodi***), vertici degli elementi, in corrispondenza dei quali sono valutate le componenti della funzione incognita.
- Il valore della funzione all'interno del singolo elemento è ottenuto sulla base dei valori dei parametri nodali attraverso l'uso di opportune *funzioni di forma*.
- La scelta di tali funzioni, come pure del tipo di *mesh* con cui discretizzare il dominio è di importanza cruciale per una corretta convergenza della soluzione.

# Analisi agli elementi finiti



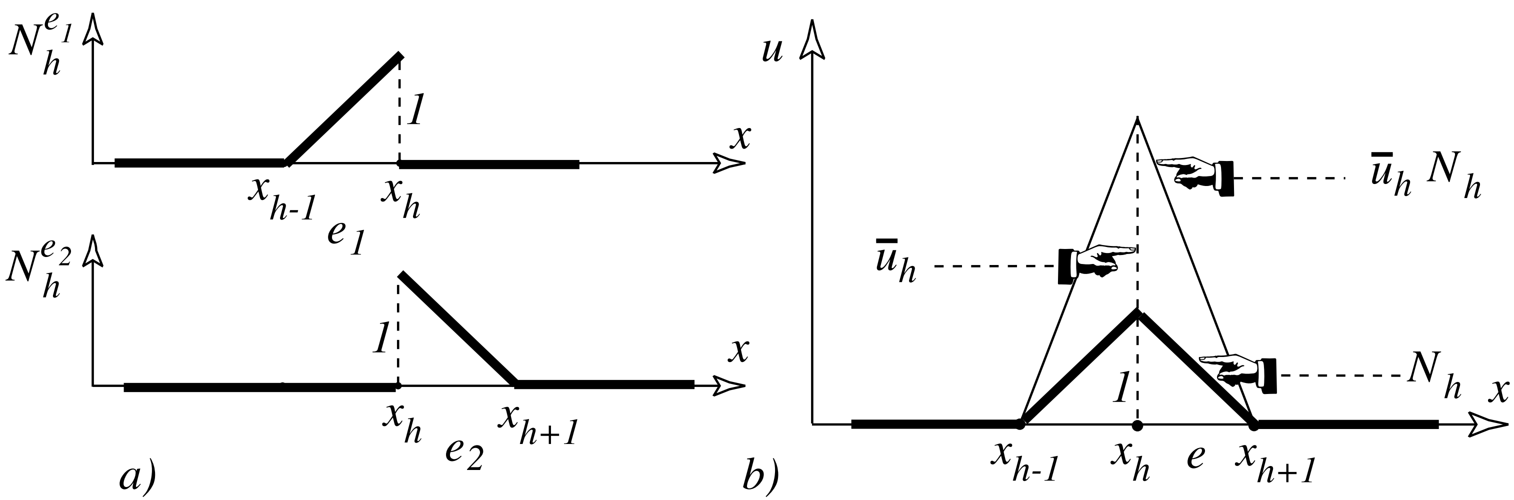
# Analisi agli elementi finiti

- Funzioni forma (elementi)



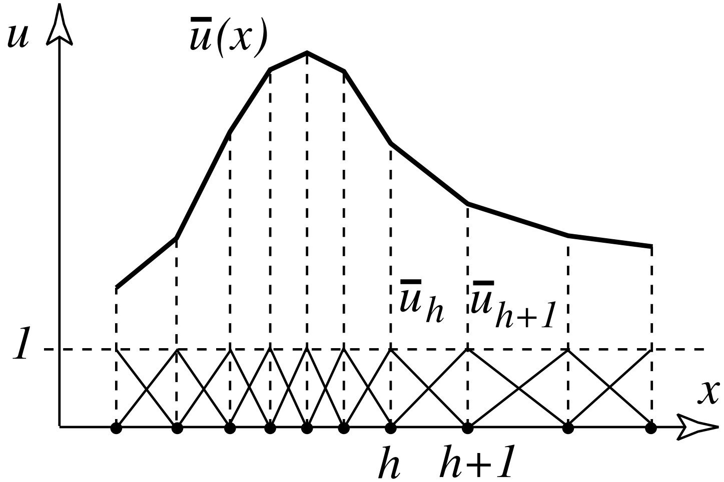
# Analisi agli elementi finiti

- Funzioni forma (nodi)



# Analisi agli elementi finiti

- Descrivere la funzione approssimanente come una combinazione delle funzioni di forma nodali:




$$\bar{u}(x) = \sum_{h=1}^{n} \bar{u}_h \, N_h(x)$$

# Analisi agli elementi finiti

- Risoluzione: metodo di Galerkin (minimizzazione dell'errore)
- Se l'equazione di partenza è

$$-k\,\frac{\mathrm{d}^2 u(x)}{\mathrm{d}x^2} = s(x)$$

- La soluzione approssimata conterrà un errore

$$r(x;\bar{u}_1,\ \bar{u}_2, \ldots \bar{u}_n) = -k\sum_{h=1}^{n}\frac{\mathrm{d}^2 N_h(x)}{\mathrm{d}x^2}\ \bar{u}_h - s(x)$$

# Analisi agli elementi finiti

- Determinare i “migliori” coefficienti minimizzano gli errori (metodo di Galerkin)
  - Residuo ortogonale alle n funzioni nodali
  - Integrazione per parti sulla derivata seconda per abbassare l’ordine delle dervate
  - Formazione del sistema algebrico (matrice fondamentale)

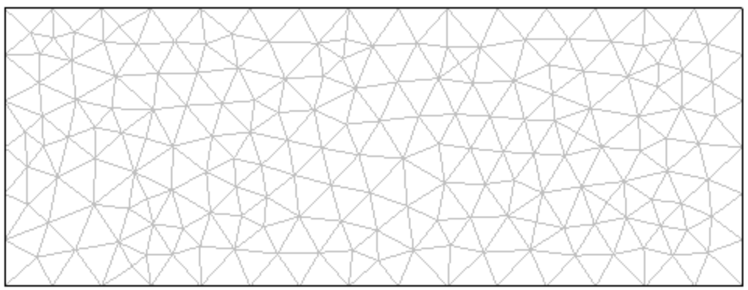
$$\boxed{\sum_{h=1}^{n} f_{ih}\, \bar{u}_h = s_i + c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n)}$$

# Nota

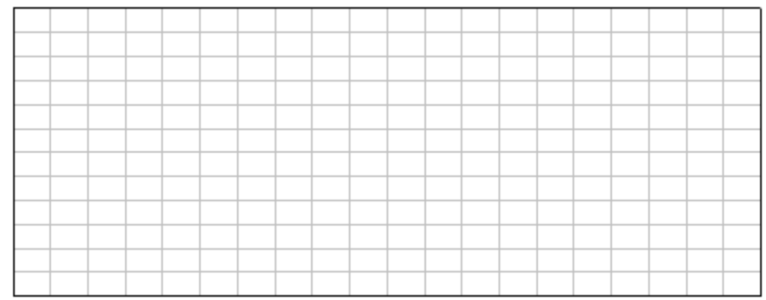
- Esistono altri strade che possono portare alla formulazione della “matrice fondamentale”
  - Metodi variazionali (principio dei lavori virtuali)
  - Formulazione diretta
  - Minimizzazione di un funzionale (energia potenziale totale)

# Mesh

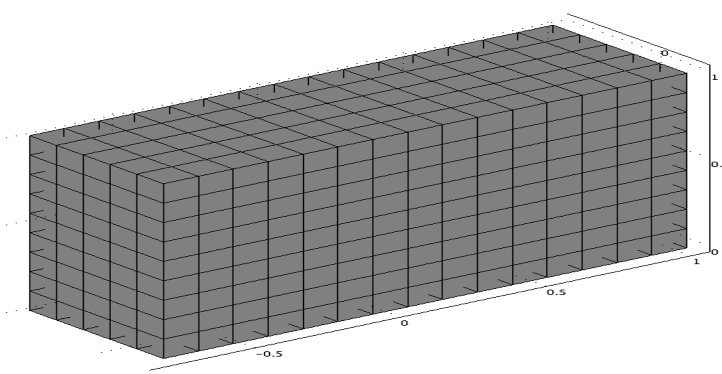
- Free Mesh



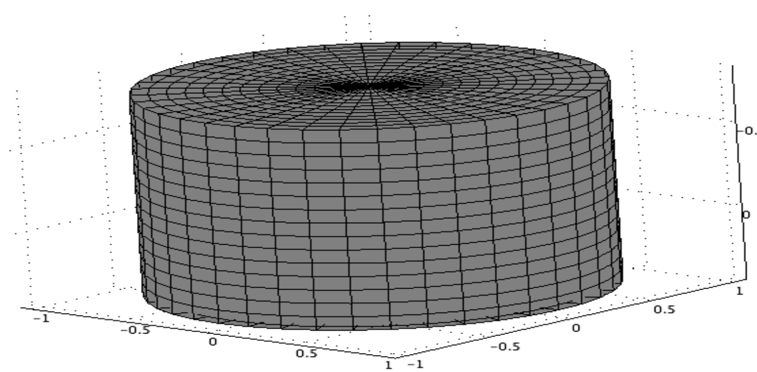
- Mapped Mesh



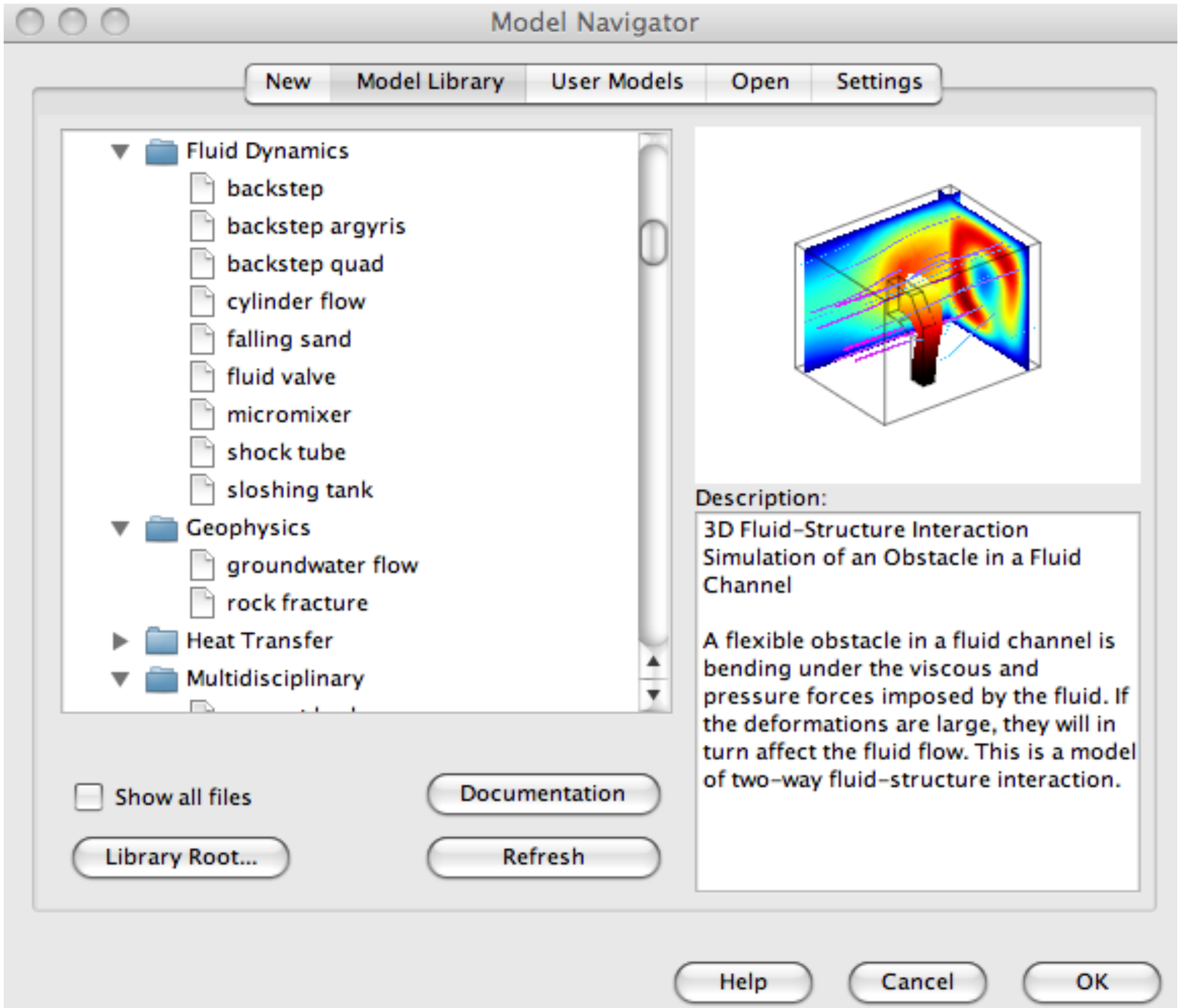
- Extruded Mesh



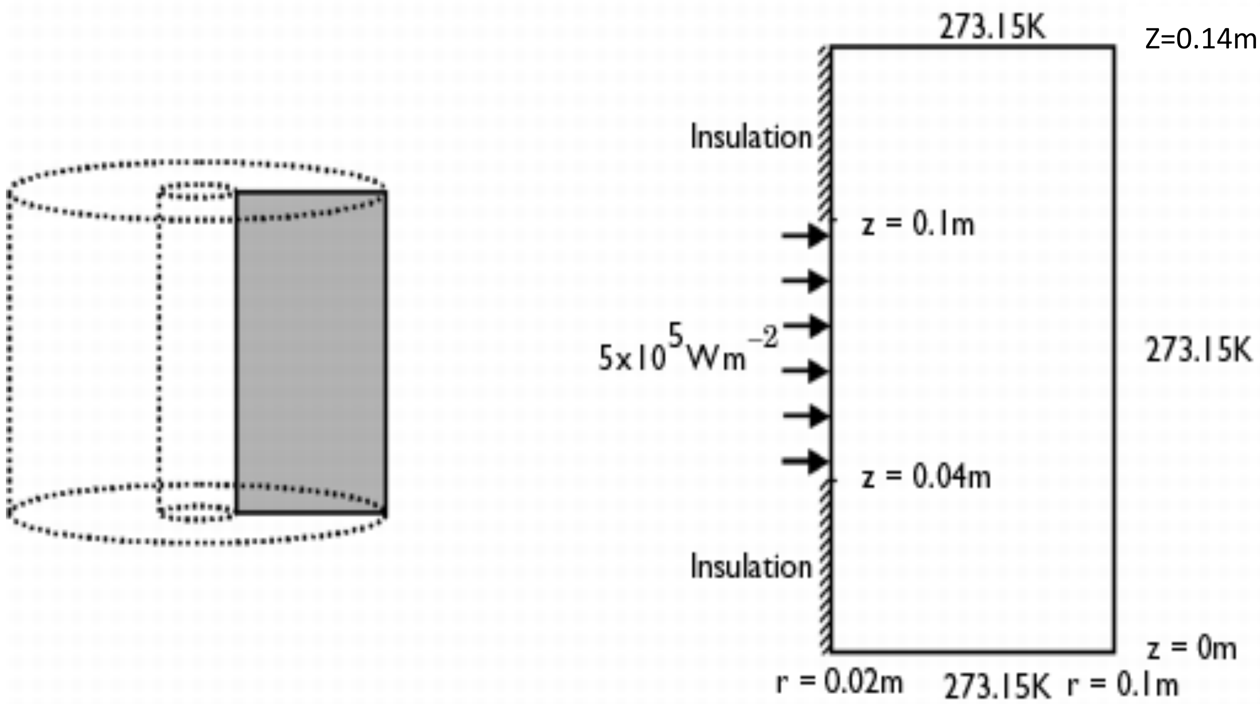
- Revolved Mesh



# Comsol Multiphysics



# Esercizio – Conduzione



# Documenti utili

- http://www.dicar.units.it/mdp/tonti/science/elementiFiniti.pdf