Matrice della funzione di trasferimento

Esercizio 1

Il modello compartimentale considerato (fig. 1)

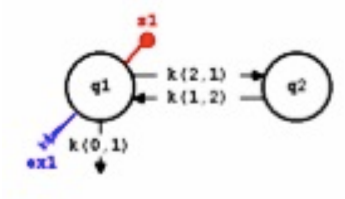

Figura 1: modello compartimentale esercizio 1

può essere scritto nella forma di stato:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

con $A = \begin{pmatrix} -(k_{01}+k_{21}) & k_{12} \\ k_{21} & -k_{12} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{V_1} & 0 \end{pmatrix}$.

La funzione di trasferimento del sistema nel dominio di Laplace è:

$$H(s) = C(s \cdot I - A)^{-1} B = \frac{(s+k_{12})/V_1}{s^2 + (k_{01}+k_{12}+k_{21})s + k_{01}k_{12}} = \frac{\beta_2 s + \beta_1}{s^2 + \alpha_2 s + \alpha_1}$$

Si costruisce la matrice della funzione di trasferimento come

$$G = \begin{pmatrix} \frac{\partial\beta_1}{\partial k_{12}} & \frac{\partial\beta_1}{\partial k_{01}} & \frac{\partial\beta_1}{\partial k_{21}} & \frac{\partial\beta_1}{\partial V_1} \\ \frac{\partial\beta_2}{\partial k_{12}} & \frac{\partial\beta_2}{\partial k_{01}} & \frac{\partial\beta_2}{\partial k_{21}} & \frac{\partial\beta_2}{\partial V_1} \\ \frac{\partial\alpha_1}{\partial k_{12}} & \frac{\partial\alpha_1}{\partial k_{01}} & \frac{\partial\alpha_1}{\partial k_{21}} & \frac{\partial\alpha_1}{\partial V_1} \\ \frac{\partial\alpha_2}{\partial k_{12}} & \frac{\partial\alpha_2}{\partial k_{01}} & \frac{\partial\alpha_2}{\partial k_{21}} & \frac{\partial\alpha_2}{\partial V_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{V_1} & 0 & 0 & -\frac{k_{12}}{V_1^2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{V_1^2} \\ k_{01} & k_{12} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è $\det(G) = -k_{12}/V_1^3$. Il determinante è quindi diverso da 0 se $k_{12} \neq 0$ (e quindi se il secondo compartimento influisce sul primo, altrimenti sarebbero due sistemi monocompartimentali in serie) oppure se V_1 è un numero finito. In queste condizioni il rango della matrice è 4, uguale al numero dei parametri, quindi il sistema è identificabile a priori.

Esercizio 2

La cinetica del tracciato del modello compartimentale di figura 1 è descritta dal seguente sistema di equazioni differenziali:

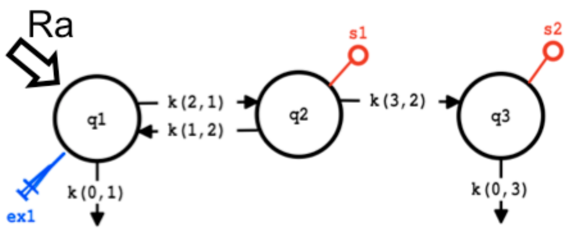

Figura 2: modello compartimentale esercizio 1

$$
\begin{cases}
\dfrac{dQ_1}{dt} = -(k_{21} + k_{01})Q_1 + k_{12}Q_2 + Ra \\
\dfrac{dQ_2}{dt} = k_{21}Q_1 - (k_{12} + k_{32})Q_2 \\
\dfrac{dQ_3}{dt} = k_{32}Q_2 - k_{03}Q_3
\end{cases}
$$

Le equazioni per la cinetica del tracciante sono:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dq_1}{dt} = -(k_{21} + k_{01})q_1 + k_{12}q_2 + ex1 \\
\dfrac{dq_2}{dt} = k_{21}q_1 - (k_{12} + k_{32})q_2 \\
\dfrac{dq_3}{dt} = k_{32}q_2 - k_{03}q_3 \\
y_1(t) = \dfrac{q_2}{V_2} \\
y_2(t) = \dfrac{q_3}{V_3}
\end{cases}
$$

dove q_i sono funzioni del tempo con condizioni iniziali nulle, $q_i(t = 0) = 0$.

Queste equazioni possono essere nella matriciale come:

$$
\begin{cases}
\dot{x} = Ax + Bu \\
y = Cx
\end{cases}
$$

con $A = \begin{pmatrix} -(k_{21} + k_{01}) & k_{12} & 0 \\ k_{21} & -(k_{12} + k_{32}) & 0 \\ 0 & k_{32} & -k_{03} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{V_2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{V_3} \end{pmatrix}$.

Poiché ci sono due uscite ed un ingresso, ci saranno due funzioni di trasferimento, H_{11} e H_{21} :

La funzione di trasferimento del sistema nel dominio di Laplace è:

$$H(s) = C\left(s \cdot I - A\right)^{-1} B$$

con

$$H_{11} = \frac{k_{21} / V_2}{k_{01}k_{12} + k_{01}k_{32} + k_{21}k_{32} + \left(k_{01} + k_{12} + k_{21} + k_{32}\right)s + s^2}$$

$$H_{21} = \frac{k_{21}k_{32} / V_3}{\left(k_{01}k_{12}k_{03} + k_{01}k_{32}k_{03} + k_{21}k_{32}k_{03}\right) + \left(k_{01}k_{12} + k_{01}k_{32} + k_{21}k_{32} + k_{01}k_{03} + k_{12}k_{03} + k_{21}k_{03} + k_{32}k_{03}\right)s +} \cdots$$

$$\ldots\ldots \overline{+\left(k_{01} + k_{12} + k_{21} + k_{32} + k_{03}\right)s^2 + s^3}$$

che possono essere riscritte come:

$$H_{11} = \frac{\beta_1^{11}}{\alpha_1^{11} + \alpha_2^{11} s + s^2}$$

$$H_{21} = \frac{\beta_1^{21}}{\alpha_1^{21} + \alpha_2^{21} s + \alpha_3^{21} s^2 + s^3}$$

Si definisce quindi il seguente sommario esaustivo

$$\begin{cases} \beta_1^{11} = k_{21} / V_2 \\ \alpha_1^{11} = k_{01}k_{12} + k_{01}k_{32} + k_{21}k_{32} \\ \alpha_2^{11} = k_{01} + k_{12} + k_{21} + k_{32} \\ \beta_1^{21} = k_{21}k_{32} / V_3 \\ \alpha_1^{21} = k_{01}k_{12}k_{03} + k_{01}k_{32}k_{03} + k_{21}k_{32}k_{03} \\ \alpha_2^{21} = k_{01}k_{12} + k_{01}k_{32} + k_{21}k_{32} + k_{01}k_{03} + k_{12}k_{03} + k_{21}k_{03} + k_{32}k_{03} \\ \alpha_3^{21} = k_{01} + k_{12} + k_{21} + k_{32} + k_{03} \end{cases}$$

E' un sistema non lineare con7 equazioni in 7 incognite. In questo momento non è possibile dire nulla sull'identificabilità del sistema. Il sistema inserito in Matlab non formisce alcuna soluzione.

Definito **p** il vettore dei parametri:

$$\mathbf{p} = \left[k_{01}, k_{21}, k_{12}, k_{32}, k_{03}, V_2, V_3\right]$$

si costruisce la matrice della funzione di trasferimento come:

$$G=\begin{bmatrix}
\frac{\partial\beta_1^{11}}{\partial k_{01}} & \frac{\partial\beta_1^{11}}{\partial k_{21}} & \frac{\partial\beta_1^{11}}{\partial k_{12}} & \frac{\partial\beta_1^{11}}{\partial k_{32}} & \frac{\partial\beta_1^{11}}{\partial k_{03}} & \frac{\partial\beta_1^{11}}{\partial V_2} & \frac{\partial\beta_1^{11}}{\partial V_3} \\
\frac{\partial\alpha_1^{11}}{\partial k_{01}} & \frac{\partial\alpha_1^{11}}{\partial k_{21}} & \frac{\partial\alpha_1^{11}}{\partial k_{12}} & \frac{\partial\alpha_1^{11}}{\partial k_{32}} & \frac{\partial\alpha_1^{11}}{\partial k_{03}} & \frac{\partial\alpha_1^{11}}{\partial V_2} & \frac{\partial\alpha_1^{11}}{\partial V_3} \\
\frac{\partial\alpha_2^{11}}{\partial k_{01}} & \frac{\partial\alpha_2^{11}}{\partial k_{21}} & \frac{\partial\alpha_2^{11}}{\partial k_{12}} & \frac{\partial\alpha_2^{11}}{\partial k_{32}} & \frac{\partial\alpha_2^{11}}{\partial k_{03}} & \frac{\partial\alpha_2^{11}}{\partial V_2} & \frac{\partial\alpha_2^{11}}{\partial V_3} \\
\frac{\partial\beta_1^{21}}{\partial k_{01}} & \frac{\partial\beta_1^{21}}{\partial k_{21}} & \frac{\partial\beta_1^{21}}{\partial k_{12}} & \frac{\partial\beta_1^{21}}{\partial k_{32}} & \frac{\partial\beta_1^{21}}{\partial k_{03}} & \frac{\partial\beta_1^{21}}{\partial V_2} & \frac{\partial\beta_1^{21}}{\partial V_3} \\
\frac{\partial\alpha_1^{21}}{\partial k_{01}} & \frac{\partial\alpha_1^{21}}{\partial k_{21}} & \frac{\partial\alpha_1^{21}}{\partial k_{12}} & \frac{\partial\alpha_1^{21}}{\partial k_{32}} & \frac{\partial\alpha_1^{21}}{\partial k_{03}} & \frac{\partial\alpha_1^{21}}{\partial V_2} & \frac{\partial\alpha_1^{21}}{\partial V_3} \\
\frac{\partial\alpha_2^{21}}{\partial k_{01}} & \frac{\partial\alpha_2^{21}}{\partial k_{21}} & \frac{\partial\alpha_2^{21}}{\partial k_{12}} & \frac{\partial\alpha_2^{21}}{\partial k_{32}} & \frac{\partial\alpha_2^{21}}{\partial k_{03}} & \frac{\partial\alpha_2^{21}}{\partial V_2} & \frac{\partial\alpha_2^{21}}{\partial V_3} \\
\frac{\partial\alpha_3^{21}}{\partial k_{01}} & \frac{\partial\alpha_3^{21}}{\partial k_{21}} & \frac{\partial\alpha_3^{21}}{\partial k_{12}} & \frac{\partial\alpha_3^{21}}{\partial k_{32}} & \frac{\partial\alpha_3^{21}}{\partial k_{03}} & \frac{\partial\alpha_3^{21}}{\partial V_2} & \frac{\partial\alpha_3^{21}}{\partial V_3}
\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}
0 & \frac{1}{V_2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{k_{21}}{V_2^2} & 0 \\
k_{12}+k_{32} & k_{32} & k_{01} & k_{01}+k_{21} & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{k_{32}}{V_3} & 0 & \frac{k_{21}}{V_3} & 0 & 0 & -\frac{k_{21}k_{32}}{V_3^2} \\
k_{12}k_{03}+k_{32}k_{03} & k_{32}k_{03} & k_{01}k_{03} & k_{01}k_{03}+k_{21}k_{03} & k_{01}k_{12}+k_{01}k_{32}+k_{21}k_{32} & 0 & 0 \\
k_{12}+k_{32}+k_{03} & k_{32}+k_{03} & k_{01}+k_{03} & k_{01}+k_{21}+k_{03} & k_{01}+k_{12}+k_{21}+k_{32} & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

Il rango di G è uguale a 5, il numero dei parametri è 7, pertanto il sistema non è univocamente identificabile.