Esercitazione 29/10/2002

Corso di Robotica Industriale

Derivata di una matrice di Rotazione

$$R = R(t)$$

R ortogonale $\Rightarrow R(t)R^T(t) = I \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left[R(t)R^T(t)\right] = 0 \Rightarrow$

$$\dot{R}(t)R^T(t) + R(t)\dot{R}^T(t) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$S(t) + S^T(t) = 0$$

$$S(t) \overset{\text{def}}{=} \dot{R}(t)R^T(t)$$

$$\Downarrow$$

$$S(t)R(t) = \dot{R}(t)R^T(t)R(t) = \dot{R}(t)$$

$$\Downarrow$$

Legame tra la matrice di rotazione e la sua derivata $\dot{R}(t) = S(t)R(t)$

Significato fisico di S(t)

Si consideri il vettore costante p'

e il vettore $p(t) = R(t)\,p'$

La sua derivata temp. è $\dot{p}(t) = \dot{R}(t)\,p'$

Indicando con w(t) la velocità angolare della terna R(t) rispetto alla terna di riferimento, dalla meccanica

$$\dot{p}(t) = \underline{w(t) \times} R(t)\,p'$$

def

$$S(t) = \hat{w}(t)$$

antisimmetrica

$$\hat{w} = \begin{bmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{bmatrix}$$

Discretizzazione di un sistema tc

Forward rectangle

$$\dot{x}(KT) = \frac{x((k+1)T) - x(kT)}{T} \quad \Longrightarrow \quad s = \frac{z-1}{T}$$

Backward rectangle

$$\dot{x}((K+1)T) = \frac{x((k+1)T) - x(kT)}{T} \quad \Longrightarrow \quad s = \frac{z-1}{Tz}$$

Forward rectangle $s = \frac{z-1}{T}$

$$s = \frac{z-1}{T}$$

$$sR(s) = \hat{w}R(s) \Rightarrow \frac{z-1}{T}R(z) = \hat{w}R(z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{z}{T}R(z) - \frac{1}{T}R(z) = \hat{w}R(z)$$

Antitrasformando

$$\frac{1}{T}R(k+1) - \frac{1}{T}R(k) = \hat{w}R(k) \Rightarrow R(k+1) = R(k) + T\hat{w}R(k)$$

$$\Rightarrow R(k+1) = (I + T\hat{w})R(k)$$

Backward rectangle $s = \dfrac{z-1}{Tz}$

$$sR(s) = \hat{w}R(s) \xrightarrow{s=\frac{z-1}{Tz}} \frac{z-1}{zT}R(z) = \hat{w}R(z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T}R(z) - \frac{1}{Tz}R(z) = \hat{w}R(z) \Rightarrow zR(z) - R(z) = \hat{w}TzR(z)$$

Antitrasformando

$$R(k+1) - R(k) = T\hat{w}R(k+1) \Rightarrow (I - T\hat{w})R(k+1) = R(k) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R(k+1) = (I - T\hat{w})^{-1}R(k)$$

Ricavare una matrice di rotazione R che meglio approssima una matrice Q data

A ortogonale $\longrightarrow$ $A^T A = I$

Definizione di Traccia

$$Tr(A) = \sum_{I=1}^{n} a_{ii}$$

Norma di Frobenius

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_{ii}|^2} = \sqrt{tr(A^T A)}$$

Proprietà

1 $Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$

2 $Tr(AB) = Tr(BA)$

3 $Tr(AA^T) = Tr(A^T A)$

Ricavare una matrice di rotazione R che meglio approssima una matrice Q data

$$\min_R \|R-Q\|_F^2$$ **Vincolo:** $R^T R = I$

$$\|R-Q\|_F^2 = trace\left[(R-Q)^T (R-Q)\right] = trace\left[(R^T R) - RQ^T - QR^T + Q^T Q\right] =$$

$$= tr\left[(R^T R)\right] + tr\left[(Q^T Q)\right] - 2tr\left[(R^T Q)\right] = tr[I] + tr\left[(Q^T Q)\right] - 2tr\left[(R^T Q)\right] =$$

$$= 3 + tr\left[(Q^T Q)\right] - 2tr\left[(R^T Q)\right]$$

$$\max_R \left[tr(R^T Q)\right]$$ **Vincolo:** $R^T R = I$

Ricavare una matrice di rotazione R che meglio approssima una matrice Q data

Decomposizione ai valori singolari di Q $Q = USV^T$

U, V **matrici ortogonali ed** $S = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$

Definiamo una matrice ortogonale Z $Z = V^T R^T U$

$$tr(R^T Q) = tr(R^T USV^T) \overset{2}{=} tr(\overline{V^T R^T U}S) = tr(ZS)$$

$$= \sum_{i=1}^{3} z_{ii}\sigma_i \overset{\text{Z ortogonale}}{\leq} \sum_{i=1}^{3} \sigma_i$$

Per massimizzare tr(R^{T}Q) quindi si pone Z=I ovvero $R = UV^T$