

Fondamenti di Automatica - III Parte

Antonio Bicchi

Università di Pisa

Versione del 9 Maggio 2006.

Alcune parti della dispensa sono in corso di integrazione o
riscrittura.

Si consiglia di procedere ad aggiornarle circa mensilmente.

Indice

1	Controllo Ottimo	5
1.1	Il Principio del Massimo	5
1.1.1	Esempio 1	8
1.1.2	Esempio 2: Veicolo con attrito	9
1.1.3	Massimo spostamento di una massa con costo quadratico del controllo	10
1.2	Formulazione Hamiltoniana	11
1.2.1	Esempio: Sistemi Meccanici Hamiltoniani	12
1.3	Altri problemi di controllo ottimo	13
1.3.1	Esempio: Percorso minimo tra due punti	13
1.3.2	Problemi di tempo minimo	14
1.3.3	Esempio: posizionamento di una massa inerziale in tempo minimo	14
1.3.4	Percorsi minimi di veicoli a raggio di sterzo limitato	16
1.4	Controllo Ottimo di Sistemi Lineari	18
1.4.1	Controllo LQR in Tempo Discreto	22
1.4.2	Controllo LQR in Matlab	23
1.4.3	Allocazione ottima degli autovalori	24
1.4.4	Sistemi SISO	25
2	Stima Ottima	29
2.1	Probabilità, Variabili Aleatorie e Processi Stocastici	29
2.1.1	Probabilità	29
2.1.2	Variabili Casuali	31
2.1.3	Valori Attesi e Statistiche di Variabili Casuali	33
2.1.4	Distribuzioni Uniformi e Normali	35
2.2	Processi Aleatori	36
2.2.1	Processi Stazionari e Processi Ergodici	37
2.3	Filtraggio Ottimo	40
2.3.1	Un semplice esempio	40
2.3.2	Stime LS e ML	41

2.3.3	Conoscenze a priori: stime MAP e MV	42
2.3.4	Aggiornamento ricorsivo delle stime	44
2.4	Sistemi Dinamici Lineari	45
2.4.1	Propagazione degli errori in assenza di misure	46
2.4.2	Aggiornamento delle stime basato sulle misure	47
2.5	Filtro di Kalman	47
2.5.1	Filtro di Kalman in Tempo Continuo e Dualità	49
2.5.2	Altre considerazioni	52
2.6	Controllo LQG	54

Capitolo 1

Controllo Ottimo

1.1 Il Principio del Massimo

Consideriamo un sistema dinamico nonlineare nella forma piuttosto generale

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad x(0) = x_0$$

Consideriamo anche un indice obiettivo

$$J = \Psi(x(T)) + \int_0^T L(x(t), u(t))dt$$

che considera i valori ottenuti dallo stato ad un tempo finale T , oltreché l'andamento dello stato e del controllo lungo tutto l'intervallo tra $t = 0$ e $t = T$. Si noti che la funzione obiettivo è interamente determinata, per un dato sistema dinamico e per date condizioni iniziali, dalla funzione di ingresso $u(t)$. Consideriamo il problema di massimizzare J , che rappresenta un *funzionale* in quanto funzione di funzioni, rispetto alle possibili scelte del controllo. In generale, i valori istantanei del controllo potranno essere soggetti a restrizioni (ad esempio, valori limitati in modulo), nel qual caso restringeremo opportunamente $u \in \mathcal{U}$.

Quello posto è un problema di calcolo variazionale, cioè un problema di ottimizzazione in cui la incognita è una funzione invece che semplicemente una variabile incognita. Un particolare ingresso $\hat{u}(t)$ è ottimo se $J(\hat{u}) \geq J(u)$, $\forall u \in \mathcal{U}$.

Essendo la minimizzazione di J sottoposta al vincolo tra l'andamento di $x(t)$ e quello di $u(t)$ espresso dalla dinamica, possiamo procedere, secondo una tecnica analoga a quella dei moltiplicatori di Lagrange nel caso di ottimizzazione di funzioni con vincoli, a scrivere un indice modificato

$$J_0 = J - \int_0^T p^T(\dot{x} - f(x, u))dt, \quad p \in \mathbb{R}^n$$

per il quale vale ovviamente $J_0 = J, \forall t, \forall u$, qualsiasi sia la scelta del moltiplicatore $p \in \mathbb{R}^n$, che potrà anche essere variabile nel tempo (cioè una funzione $p : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto p(t)$).

Riscriviamo

$$\begin{aligned} J_0 &= \Psi(x(T)) + \int_0^T [L(x, u) + p^T f(x, u) - p^T \dot{x}] dt \\ &:= \Psi(x(T)) + \int_0^T [H(p, x, u) - p^T \dot{x}] dt \end{aligned}$$

dove si è definito implicitamente il funzionale

$$H(p, x, u, t) = p^T f(x, u) + L(x, u, t)$$

che viene detto *Hamiltoniano* del problema.

Cercando di dare condizioni necessarie affinché un ingresso $\hat{u}(t)$ sia ottimo, consideriamo il problema localmente, cioè confrontiamo l'indice ottenuto da $\hat{u}(t)$ rispetto a quello ottenuto da funzioni $u(t)$ che differiscano “poco” da $\hat{u}(t)$. Considereremo quindi funzioni u per cui valga $\|\hat{u} - u\| := \max_i \int_0^T |\hat{u}_i(t) - u_i(t)| dt < \epsilon$, con ϵ opportunamente piccolo (si noti che sono ammesse differenze anche grandi tra le componenti di ingresso, purché per tempi brevi).

Per la continuità delle soluzioni delle equazioni differenziali ordinarie, anche le soluzioni $x(t, x_0, u)$ differiranno poco dalla soluzione $x(t, x_0, \hat{u})$, e scriveremo $x(t, x_0, \hat{u}) - x(t, x_0, u) = \delta x(t)$, con $\|\delta x(t)\|$ infinitesimo dello stesso ordine di ϵ . La funzione obiettivo è corrispondentemente modificata da

$$\begin{aligned} \delta J_0 &= \Psi(x(T) + \delta x(T)) - \Psi(x(T)) \\ &\quad + \int_0^T [H(p, x + \delta x, u) - H(p, x, \hat{u})] dt \\ &\quad - \int_0^T [p^T (\dot{x} + \delta \dot{x}) - p^T \dot{x}] dt \end{aligned}$$

Approssimando al primo ordine, e indicando con un pedice le derivate parziali, si ha

$$\Psi(x(T) + \delta x(T)) - \Psi(x(T)) \approx \Psi_x(x(T)) \delta x(T),$$

e

$$\begin{aligned} &\int_0^T [H(p, x + \delta x, u) - H(p, x, \hat{u})] dt \\ &= \int_0^T [H(p, x + \delta x, u) - H(p, x, u) + H(p, x, u) - H(p, x, \hat{u})] dt \\ &\approx \int_0^T [H_x(p, x, u) \delta x + H(p, x, u) - H(p, x, \hat{u})] dt \\ &\approx \int_0^T [H_x(p, x, \hat{u}) \delta x + H(p, x, u) - H(p, x, \hat{u})] dt \end{aligned}$$

Usando invece la regola di integrazione per parti, si ha che il terzo addendo in δJ_0 vale

$$\begin{aligned} \int_0^T p^T \delta \dot{x} dt &= \left[p^T \delta x \right]_0^T - \int_0^T \dot{p}^T \delta x dt \\ &= p(T)^T \delta x(T) - p(0)^T \delta x(0) - \int_0^T \dot{p}^T \delta x dt. \end{aligned}$$

Osservando che $\delta x(0) = 0$ (le variazioni del controllo non hanno influenza sulle condizioni iniziali), possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \delta J_0 \approx & \\ & [\Psi_x(x(T)) - p^T(T)] \delta x(T) \\ & + \int_0^T [H_x(p, x, u) + \dot{p}^T] \delta x dt \\ & + \int_0^T [H(p, x, u) - H(p, x, \hat{u})] dt \end{aligned}$$

a meno di infinitesimi di ordine superiore rispetto a ϵ . Possiamo adesso semplificare δJ_0 usando la libertà che ci è concessa nella scelta di $p(t)$. Ponendo infatti

$$\dot{p}(t) = -H_x^T(p, x, u) \quad \text{e} \quad p(T) = \Psi_x^T(x(T)),$$

si ottiene

$$\delta J_0 = \int_0^T [H(p, x, u) - H(p, x, \hat{u})] dt.$$

Si noti che le scelte fatte per $p(t)$ equivalgono a definire una equazione differenziale ordinaria *aggiunta* al problema, con condizioni non iniziali come consueto, bensì terminali.

Se $\hat{u}(t)$ è ottima, come supposto, allora deve essere $\delta J_0 < 0$, $\forall u(t)$ nell'insieme considerato. Questo implica che per ogni t , valga

$$H(p, x, u) \leq H(p, x, \hat{u}).$$

Questa condizione, molto più forte della disequazione appena vista, discende dal fatto che, se esistesse una u per la quale, anche in un solo istante t^* , valesse $H(p, x, u(t^*)) > H(p, x, \hat{u}(t^*))$, allora si potrebbe costruire un nuovo ingresso $w(t) = \hat{u}(t)$, $\forall t \neq t^*$, ma $w(t^*) = u(t^*)$, per la quale risulterebbe $\delta J_0 > 0$, contro l'ipotesi che \hat{u} sia ottima.

E' ovvio che la relazione $H(p, x, u) \leq H(p, x, \hat{u})$, quando fossero noti lo stato ed il co-stato ad un tempo t , permetterebbe di trovare il valore ottimo u con la soluzione di un normale problema di massimizzazione di una funzione rispetto ad una variabile. In particolare, se gli ingressi non sono soggetti a vincoli, una condizione necessaria affinché $\hat{u}(t)$ sia ottimo è che esso sia un estremo di $H(x, p, u)$, cioè che

$$H_u(x, p, u)|_{\hat{u}} = 0.$$

Un contributo importante che generalizza la applicabilità di questa osservazione al caso (praticamente molto importante) in cui i valori del controllo siano limitati in un insieme compatto $u(t) \in \mathcal{U}$, è il seguente

Principio del Massimo di Pontryagin: se $\hat{u}(t)$ è il controllo ottimo, allora $H(x(t), p(t), \hat{u}(t))$ assume il valore massimo tra quelli ottenuti da $u(t) \in \mathcal{U}$

Si osservi esplicitamente come i massimi di una funzione continua su un compatto possono essere ottenuti non solo nei punti estremali ma anche sulla frontiera dell'insieme.

Riassumendo, abbiamo trovato che:

Se $\hat{u}(t)$ e $x(t)$ sono la funzione di ingresso e la corrispondente traiettoria di stato soluzioni del problema di controllo ottimo sopra definito, allora esiste una traiettoria (detta di co-stato) $p(t)$ che soddisfa le seguenti condizioni:

$$\begin{array}{ll} \dot{x} = f(x, u); & \text{dinamica dello stato} \\ x(0) = x_0; & \text{condizioni iniziali in } x \\ \dot{p} = -f_x^T(x, u)p(t) - L_x^T(x, u); & \text{dinamica del co-stato} \\ p(T) = \Psi_x^T(x(T)); & \text{condizioni finali sul co-stato} \end{array}$$

ed inoltre vale

$$H(x, p, \hat{u}) \geq H(x, p, u), \quad \forall u \in \mathcal{U}.$$

Questo sistema di equazioni definisce completamente l'ottimo, nel senso che si hanno tante equazioni quante incognite: queste ultime sono le $2n + m$ funzioni $u(t)$, $x(t)$ e $p(t)$, determinate dalle $2n$ equazioni differenziali ordinarie dello stato e del co-stato, con le loro rispettive condizioni agli estremi, e dalle m condizioni di massimizzazione dell'Hamiltoniano.

La soluzione di questo sistema di equazioni non è peraltro facile nel caso generale. Una delle cause principali di tali difficoltà deriva dal fatto che le condizioni agli estremi sono miste iniziali e finali. Anche le soluzioni numeriche possono risultare molto impegnative.

1.1.1 Esempio 1

A scopo puramente illustrativo, si consideri il problema di trovare la curva nel piano che, partendo dalla origine, raggiunga la massima ordinata per un dato valore della ascissa, avendo una derivata limitata. Il problema, di cui la soluzione è ovviamente una retta a inclinazione pari al valore massimo ammissibile, può essere posto nella forma di un problema di controllo ottimo. Sia t la variabile di ascissa, con $0 \leq t \leq T$, e x quella in ordinata. Sia $u(t)$ il valore della derivata della curva in t , e sia U il suo massimo valore ammissibile. L'obiettivo da massimizzare può essere espresso mediante un

funzionale di costo $J = \psi(x(T)) + \int_0^T L(x, u, t) dt$ scegliendo $\psi(x(T)) = x(T)$ e $L(x, u, t) = 0$.

Si ha dunque il problema

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= u(t) \\ x(0) &= 0 \\ u(t) &\leq U, \quad 0 \leq t \leq T \\ J &= x(T)\end{aligned}$$

L'Hamiltoniano del problema vale $H = pu$ (stato e costato sono scalari), quindi l'equazione aggiunta è data da $\dot{p} = -H_x = 0$, con $p(T) = \psi_x(x(T)) = 1$. Ne segue $p(t) = 1$, $T \geq t \geq 0$. Il controllo ottimo è quello che massimizza $H = u(t)$, quindi ovviamente $u(t) \equiv U$. La curva ottima ha derivata costante e pari al massimo valore disponibile.

1.1.2 Esempio 2: Veicolo con attrito

Si consideri la equazione dinamica di un veicolo di massa unitaria, con attrito viscoso lineare di costante c , soggetto ad una spinta u . Sia x la velocità del veicolo, e U il massimo valore della spinta disponibile. Si vuole ottenere la massima velocità del veicolo al tempo T , ma al contempo si deve tenere conto della spesa di carburante, il cui consumo istantaneo è proporzionale secondo un fattore γ al quadrato della spinta. Scriviamo dunque

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -cx + u(t) \\ x(0) &= 0 \\ u(t) &\leq U, \quad 0 \leq t \leq T \\ J &= x(T) - \int_0^T \gamma u^2(t) dt\end{aligned}$$

L'Hamiltoniano vale $H = -\gamma u^2 - pcx + pu$, da cui la dinamica aggiunta $\dot{p} = cp$ con condizioni finali $p(T) = \psi_x(x(T)) = 1$. La soluzione della dinamica aggiunta è semplice in questo caso, e vale

$$p(t) = e^{c(t-T)}.$$

Per il principio di Pontryagin, il controllo ottimo è quello che massimizza l'Hamiltoniano in ogni istante t . Poiché il controllo e lo stato non appaiono negli stessi termini in H , la massimizzazione è agevole. Si ha infatti

$$\hat{u} = \arg \max_{u \leq U} H(x, u, t) = \arg \max_{u \leq U} -\gamma u^2 + pu.$$

Valutando $H_u = 0$ si ottiene un massimo per $\bar{u} = \frac{p}{2\gamma}$. Si ha quindi

$$\hat{u} = \begin{cases} \frac{e^{c(t-T)}}{2\gamma}, & e^{c(t-T)} \leq 2\gamma U \\ U, & e^{c(t-T)} > 2\gamma U \end{cases} .$$

Quindi si hanno i casi

- se $2\gamma U \leq e^{-cT}$, si ha $\hat{u} \equiv U$;
- se $2\gamma U \geq 1$, si ha $\hat{u} = \frac{1}{2\gamma}e^{c(t-T)}$;
- se invece $e^{-cT} < 2\gamma U < 1$, si ha

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} \frac{e^{c(t-T)}}{2\gamma}, & 0 < t < T - \frac{|\log(2\gamma U)|}{c} \\ U, & t \geq T - \frac{|\log(2\gamma U)|}{c} \end{cases} .$$

1.1.3 Massimo spostamento di una massa con costo quadratico del controllo

Consideriamo ancora una massa unitaria in moto rettilineo sottoposta a una spinta il cui costo è proporzionale al quadrato della intensità. Si desidera in questo caso massimizzare la distanza raggiunta dalla massa. Scriviamo dunque

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \\ x(0) &= 0 \\ J &= x_1(T) - \int_0^t \gamma u^2 dt, \end{aligned}$$

dove γ rappresenta il peso del costo del controllo relativamente al valore dell'obiettivo da massimizzare. Si ha facilmente

$$H = p_1 x_2 + p_2 u - \gamma u^2$$

e le equazioni aggiunte

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -H_{x_1} = 0, & p_1(T) &= \Psi_{x_1}(x(T)) = 1; \\ \dot{p}_2 &= -H_{x_2} = -p_1, & p_2(T) &= \Psi_{x_2}(x(T)) = 0. \end{aligned}$$

da cui immediatamente $p_1(t) \equiv 1$ e $p_2(t) = T - t$. Dalla massimizzazione dell'hamiltoniano risulta quindi

$$H_u = p_2 - 2\gamma u \Rightarrow \hat{u} = \frac{1}{2\gamma}(T - t).$$

Il controllo ottimo decresce quindi linearmente nel tempo. Se è poi presente un limite superiore al valore della spinta U , la discussione segue le linee dell'esempio precedente.

1.2 Formulazione Hamiltoniana

Si dà talvolta una formulazione diversa del problema del controllo ottimo, detta Hamiltoniana, che gode di una maggiore compattezza ed eleganza. Si introduce un nuovo stato definito da

$$\dot{x}_L(t) = L(x(t), u(t)), \quad x_L(0) = 0$$

e lo si giustappone a x in un nuovo vettore $n + 1$ dimensionale $x_e^T = [x_L^T, x^T]$, talché l'indice obiettivo diviene

$$J = \Psi(x(T)) + x_L(T) := \Phi(x_e(t))$$

La funzione hamiltoniana viene parimenti ridefinita da

$$H = p_e^T(t)\dot{x}_e(t) = p_L^T(t)\dot{x}_L(t) + p^T(t)\dot{x}(t)$$

da cui si ha

$$\begin{cases} \dot{x}_e(t) = \left(\frac{\partial H}{\partial p_e}\right)^T & x_e(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ x(0) \end{bmatrix} \\ \dot{p}_e(t) = -\left(\frac{\partial H}{\partial x_e}\right)^T & p_e(T) = \begin{bmatrix} 1 \\ \Psi_x(x(T)) \end{bmatrix} \end{cases}$$

che definiscono interamente il problema assieme alla condizione di massimizzazione dell'hamiltoniano $\hat{u} = \arg \max_{u \in \mathcal{U}} H(x, p, u)$.

Si noti che, non essendo H funzione esplicita di x_L , dalle equazioni differenziale per il costato esteso si ricava $\dot{p}_L = 0$, $p_L(T) = 1$, da cui $p_L(t) \equiv 1$, per cui la funzione hamiltoniana coincide con quella precedentemente definita.

Sussiste infine la notevole relazione

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H(x, p, t) &= H_p \dot{p} + H_x \dot{x} + H_t \\ &= -H_p H_x^T + H_x H_p^T + H_t = H_t \end{aligned}$$

da cui, se l'Hamiltoniano non dipende esplicitamente dal tempo (ovvero se il costo e la dinamica sono tempo-invarianti), si ha che, in corrispondenza di traiettorie ottimali, l'Hamiltoniano stesso è costante, vale a dire è *un integrale primo del moto*.

1.2.1 Esempio: Sistemi Meccanici Hamiltoniani

Come primo esempio, per mostrare la generalità delle relazioni trovate, useremo la tecnica variazionale appena descritta per ricavare le equazioni dinamiche del moto di un sistema conservativo, descritto da coordinate generalizzate q .

Si consideri dunque un sistema con Lagrangiana $L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q)$, dove $T(q, \dot{q})$ è l'energia cinetica, e $U(q)$ l'energia potenziale del sistema. Ci si propone di trovare la legge del moto di questo sistema che minimizza l'integrale della Lagrangiana, secondo quello che in fisica viene detto "principio di minima azione". Assimiliamo quindi le velocità da determinare alla funzione di controllo incognita u in un problema di controllo ottimo, cioè poniamo $\dot{q} = u$, e scriviamo

$$J = \int_0^T (T(q, u) - U(q)) dt$$

ovvero

$$H(q, u, p) = T(q, u) - U(q) + p^T u$$

da cui

$$\begin{aligned} \dot{p}^T &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial L}{\partial q}, \\ 0 &= \frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial L}{\partial u} + p^T. \end{aligned}$$

Differenziando rispetto al tempo e combinando le due equazioni si ottiene

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0,$$

ovvero le equazioni di Eulero-Lagrange per il moto di sistemi conservativi.

Se la lagrangiana L non è funzione esplicita del tempo, H è un integrale primo, quindi è una costante del moto. Osservando che

$$H = T - U - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \dot{q}$$

e che l'energia cinetica è una forma quadratica omogenea delle velocità, del tipo $T = \dot{q}^T I(q) \dot{q}$, e che quindi $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \dot{q} = 2T$, si ottiene

$$-H = T + U = \text{cost.}$$

cioè, l'energia meccanica si conserva nel moto di un sistema conservativo.

Con piccole modifiche del procedimento precedente, è possibile trattare il caso in cui siano presenti forze generalizzate non conservative Q_{nc} , arrivando alla nota equazione

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = Q_{nc}.$$

1.3 Altri problemi di controllo ottimo

Vi sono ovviamente altre possibili posizioni dei problemi di controllo ottimo.

In alcuni casi non ci si accontenta di pesare la distanza della configurazione finale da un valore desiderato come fatto con $\Psi(x(T))$, ma si vuole imporre esattamente a $x(T)$ un dato valore. In tal caso, la caratterizzazione sopra fornita della soluzione è ancora valida, laddove si rimuovano le condizioni finali sul co-stato (il numero di equazioni totale non cambia). In problemi in cui solo alcune componenti dello stato siano assegnate al tempo finale, saranno assegnate condizioni terminali solo alle componenti del co-stato di indice diverso da quelle.

1.3.1 Esempio: Percorso minimo tra due punti

Ancora a livello illustrativo, si consideri il problema di trovare la più breve curva nel piano che unisca due punti dati, ad esempio la origine del piano con un punto di coordinate $(1, 1)$. Questo problema può essere scritto in termini di controllo ottimo con alcuni semplici artifici.

Poniamo le coordinate del piano uguali a (t, x) , e imponiamo le condizioni iniziali $x(t = 0) = 0$, $x(t = 1) = 1$. Sia inoltre $\dot{x}(t) = u(t)$ la pendenza della curva da determinare. La lunghezza dell'arco infinitesimo di curva corrispondente ad un incremento dt vale $\sqrt{dx^2 + dt^2}$ ovvero $\sqrt{(1 + u^2)}dt$. Scriviamo quindi

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u \\ x(0) &= 0 \\ x(1) &= 1 \\ J &= \int_0^1 \sqrt{1 + u^2} dt \end{aligned}$$

Si noti che il problema è qui di minimizzazione, e non di massimizzazione come discusso in precedenza. Ciò non altera sostanzialmente la natura del problema: si può procedere o cambiando il segno del funzionale J e massimizzando, ovvero semplicemente procedendo come detto in precedenza eccetto per la ricerca del controllo ottimo, che sarà quello che minimizza l'Hamiltoniano.

L'Hamiltoniano del problema di minimizzazione vale

$$H = p^T u + \sqrt{1 + u^2}$$

L'equazione aggiunta è ovviamente $\dot{p} = H_x = 0$. Essendo fissato il valore terminale di $x(1)$, non è fissata la $p(T)$ (che dovrebbe essere determinata dalle altre condizioni, se necessario). Sappiamo comunque che si avrà $p(t) = \text{cost}$.

Anche senza conoscere p , né risolvere $H_u = 0$, osserviamo che l'unico termine in H che dipende dal tempo è u stesso. Dovendo $u(t)$ minimizzare H per ogni t , ne risulta che $\hat{u}(t) = u = \text{cost}$. Quindi la pendenza della curva è costante, cioè la curva più breve è un segmento di retta. Trovatane la natura, la specifica soluzione si trova a partire dalle condizioni ai tempi iniziale e finale: si tratta ovviamente della retta passante per i punti dati.

1.3.2 Problemi di tempo minimo

Un altro caso di particolare interesse è quello in cui il tempo finale T sia libero, e rappresenta quindi una ulteriore variabile da determinare. Si noti dalla espressione dell'indice obiettivo

$$J_0 = \Psi(x(T)) + \int_0^T [H(p, x, u) - p^T \dot{x}] dt$$

che, in corrispondenza di un valore ottimo \hat{T} , la variazione di J_0 dovuta ad una modifica dell'estremo superiore di integrazione deve essere nulla.

Valendo la *condizione di trasversalità* al tempo finale $p^T(T)\dot{x}(T) = 0$, si trova la ulteriore condizione necessaria per il tempo finale ottimo

$$H(x(\hat{T}), p(\hat{T}), u(\hat{T})) = 0.$$

1.3.3 Esempio: posizionamento di una massa inerziale in tempo minimo

Consideriamo il problema di portare un corpo di massa $m = 1$ mobile su una retta senza attrito, da una posizione iniziale $x(0) = x_0$ all'origine nel minimo tempo possibile. Naturalmente, il problema ha senso solo se la forza con cui si può agire sulla massa è limitata.

Scrivendo la dinamica $\ddot{x} = u$ in forma di stato, si vuole dunque minimizzare il problema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \\ x(0) &= x_0 \\ x(T) &= 0 \\ -1 &\leq u \leq 1 \\ J &= \int_0^T 1 dt \end{aligned}$$

L'Hamiltoniano vale $H = 1 + p_1x_2 + p_2u$, da cui immediatamente si ha

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0 &\Rightarrow p_1 = \text{const.} \\ \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -p_1 &\Rightarrow p_2(t) = p_2^f + p_1(T - t) \end{aligned}$$

Il controllo ottimo è dunque quello che minimizza

$$H = 1 + p_1x_2 + p_2(t)u$$

e quindi vale

$$\begin{cases} u = 1, & p_2 < 0; \\ u = -1, & p_2 > 0; \end{cases}$$

La condizione dei problemi a tempo minimo $H(t_f) = 0$, impone poi che $p_2^f u(T) = -1$ (si ricordi che $x(T) = 0$), quindi

$$\begin{cases} p_2^f > 0, & u(T) < 0 \\ \text{ovvero} \\ p_2^f < 0, & u(T) > 0 \end{cases}$$

Si noti che il controllo ottimo non è definito negli istanti in cui si ha $p_2(t) = 0$. D'altronde, l'andamento lineare di $p_2(t)$ mostra che, eccettuato il caso in cui fosse $p_1 = 0$ e $p_2 = p_2^f = 0$, che è da escludere, si ha $p_2(t) = 0$ solo per un valore isolato $t = t^*$ nell'intervallo $[0, T]$: il controllo ottimo è quindi discontinuo in t^* .

Si osserva anche che il segno del controllo può cambiare una sola volta nel corso di una esecuzione del controllo.

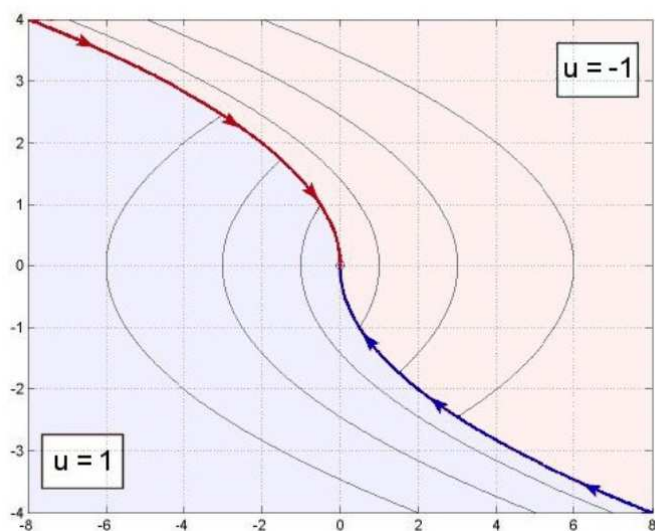
Questo tipo di controllo, che usa solo i valori massimo e minimo dell'intervallo ammissibile, viene detto *bang-bang*. La funzione $p_2(t)$, i cui attraversamenti dello zero stabiliscono le commutazioni del valore del controllo, viene detta funzione di *switching*. Il controllo ottimo risulta quindi in una fase di accelerazione massima seguita da una fase di decelerazione massima, o viceversa, a seconda delle condizioni iniziali.

La traiettoria ottima corrispondente al tratto finale del controllo ottimo può essere disegnata esplicitamente nel piano di stato, integrando all'indietro le equazioni del moto ottimo nei due casi:

$$\text{a) } u(t_f) = -1 \Rightarrow x_2(t) = t_f - t, \quad x_1(t) = -\frac{(t_f - t)^2}{2} \Rightarrow x_1 = -x_2^2/2$$

$$\text{b) } u(t_f) = 1 \Rightarrow x_2(t) = t - t_f, \quad x_1(t) = \frac{(t - t_f)^2}{2} \Rightarrow x_1 = x_2^2/2$$

La curva di switching è data dunque da due rami di parabola, uniti nell'origine.



Le curve ottime sono anch'esse archi di parabola, paralleli alle precedenti.

1.3.4 Percorsi minimi di veicoli a raggio di sterzo limitato

Consideriamo il modello cinematico di un veicolo su ruote

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u \cos \theta(t) \\ \dot{y}(t) = u \sin \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) = \omega(t), \end{cases}$$

dove $\xi(t) = (x(t), y(t), \theta(t))$ rappresentano le coordinate del veicolo e la direzione di moto corrente, u e ω rappresentano, rispettivamente, le velocità lineari e angolari. Si considererà il caso in cui il veicolo proceda a velocità costante $u = U > 0$.

La limitatezza dell'angolo di sterzata del veicolo si può modellare con una limitazione della velocità angolare $|\omega| \leq \frac{U}{R}$. Si suppongano note una configurazione iniziale del veicolo $\xi_i = (x_i, y_i, \theta_i)$ e una configurazione finale $\xi_f = (x_f, y_f, \theta_f)$.

Vogliamo determinare il cammino di lunghezza minima tra le due configurazioni.

Il problema di controllo ottimo è posto come segue:

$$\begin{cases} \min J = \int_0^T 1 dt, \\ \dot{x}(t) = U \cos \theta(t), \\ \dot{y}(t) = U \sin \theta(t), \\ \dot{\theta}(t) = \omega(t), \\ |\omega| \leq \frac{U}{R}, \\ \xi(0) = \xi_i, \\ \xi(T) = \xi_f. \end{cases} \quad (1.1)$$

L'Hamiltoniano del sistema risulta

$$H(p, \xi) = 1 + p_1 U \cos(\theta) + p_2 U \sin(\theta) + p_3 \omega$$

Per il principio del minimo di Pontryagin, si ha che i controlli ottimi sono quelli che minimizzano l'Hamiltoniano

$$\hat{\omega} = \arg \min_{\omega \in [-\frac{U}{R}, \frac{U}{R}]} H(p, \xi).$$

Una condizione necessaria per l'ottimalità è:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial \xi}$$

Esplicitando la condizione sulle derivate del co-stato si ha che

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \Rightarrow p_1 = \text{const.} := d \cos \phi \\ \dot{p}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \Rightarrow p_2 = \text{const.} := d \sin \phi \\ \dot{p}_3 &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = p_1 U \sin \theta - p_2 U \cos \theta = U d \sin(\theta - \phi) \end{aligned}$$

Dalla condizione di ottimalità si ha che, all'interno dell'intervallo $-\frac{U}{R} < \omega < \frac{U}{R}$, deve valere:

$$\frac{\partial H}{\partial \omega} = p_3 = 0$$

Quindi se, lungo una traiettoria ottima, si ha controllo non saturato $|\omega| < \frac{U}{R}$, allora $\dot{p}_3 = U d \sin(\theta - \phi) = 0$ da cui segue che $\theta = \phi \pm \pi$, quindi θ costante. Si ottiene quindi che, se $|\omega| \neq \frac{U}{R}$, allora $\omega = 0$, e il tratto percorso dal veicolo è rettilineo.

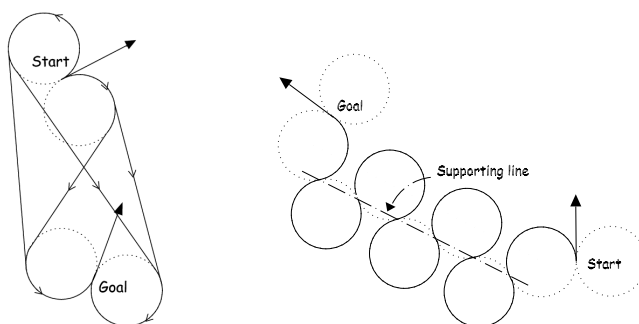
Altrimenti, essendo l'Hamiltoniano funzione lineare di ω , il suo minimo non potrà trovarsi che sui bordi dell'intervallo ammissibile per ω , e si avrà

$$\begin{cases} U d \sin(\theta - \phi) > 0 \Rightarrow \omega = -\frac{U}{R} \\ U d \sin(\theta - \phi) < 0 \Rightarrow \omega = \frac{U}{R} \end{cases}$$

In queste circostanze, quindi, il veicolo percorre tratti curvilinei di circonferenze di raggio massimo, curvando a destra o a sinistra a seconda del segno della funzione di switching $Ud \sin(\theta - \phi)$.

- Denotiamo con C_R e C_L un tratto di traiettoria corrispondente ad un arco di circonferenza di raggio minimo (R) e percorso in senso orario o antiorario, e con S un tratto rettilineo.

- Le traiettorie ottime vanno quindi cercate tra “parole” candidate costruite con le “lettere” C_R, C_L, S . Ogni tratto ha una propria lunghezza, che deve essere trovata sulla base delle condizioni al contorno e di ottimalità.



- Nel 1957, Dubins ha dimostrato il seguente teorema: Ogni curva continua con derivata continua e derivata seconda continua a tratti, che colleghi due punti orientati nel piano con curvatura limitata, è di lunghezza non inferiore a quella di una curva di tipo $C_R C_L C_R$, o $C_L C_R C_L$, oppure CSC , con $C \in \{C_R, C_L\}$.

- Reeds e Shepp hanno esteso il risultato al caso in cui U possa variare in un intervallo $|U| \leq 1$, nel qual caso i percorsi minimi possono essere scritti come 46 diverse possibili parole di non più di cinque lettere tra C_R, C_L, S , intervallate da non più di due inversioni di velocità.

1.4 Controllo Ottimo di Sistemi Lineari

Applichiamo i principi del controllo ottimo ad un sistema lineare

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$$

con un indice quadratico

$$J = \frac{1}{2}x^T(T)Fx(T) + \int_0^T \frac{1}{2} \left(x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t) \right) dt$$

con matrice R positiva definita e Q ed F almeno semidefinite positive.

Si tratta quindi di un indice che comprende un costo assegnato alle variabili di stato al tempo finale (che si desiderano quindi essere vicine all'origine secondo i pesi fissati da F); un costo della evoluzione dello stato, che favorisce soluzioni che più rapidamente convergono all'origine secondo i pesi fissati da Q ; e un costo del controllo impiegato, che favorisce ingressi meno energici secondo i pesi fissati da R . Si noti che, trattandosi di costi, il problema qui posto è quello della sua minimizzazione, ovvero della massimizzazione di $-J$.

La scelta delle matrici F, Q, R può essere fatta secondo criteri di ragionevolezza, ad esempio ponendole diagonali e pari a

$$\begin{aligned} 1/F_{ii} &= \text{max. valore accettabile per } x_i^2(T) \\ 1/Q_{ii} &= T * \text{max. valore accettabile per } x_i^2(t) \\ 1/R_{ii} &= T * \text{max. valore accettabile per } u_i^2(t) \end{aligned}$$

L'Hamiltoniano vale in questo caso

$$H(x, p, u) = p^T Ax + p^T Bu - \frac{1}{2} x^T Q x - \frac{1}{2} u^T R u.$$

Non essendo l'ingresso limitato, ed essendo H illimitato superiormente al variare di u , i minimi dell'Hamiltoniano possono solo trovarsi nei suoi punti di estremo. Imponendo

$$H_u = p^T B - u^T R = 0$$

si ha immediatamente

$$\hat{u} = R^{-1} B^T p.$$

Inoltre, dalle condizioni $\dot{p} = -H_x$ e $\dot{x} = H_p$ si ha

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BR^{-1}B^T \\ Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix}.$$

Queste equazioni, assieme alle condizioni $x(0) = x_0$ e $p(T) = -Fx(T)$, determinano il controllo ottimo.

Il controllo ottimo così trovato risulta comunque una funzione del tempo, calcolata una volta per tutte sulla base del modello dato e delle condizioni iniziali, e quindi rappresenta un controllo in anello aperto.

Siamo invece interessati ad ottenere un controllo ottimo in anello chiuso, che unisca alle proprietà note della retroazione, la minimizzazione del

costo dato. Chiederemo che la legge di retroazione sia lineare, ma non necessariamente tempo invariante (si può dimostrare che non si perde così in generalità).

Essendo $u = R^{-1}B^T p$, supporremo dunque che sia lineare la relazione tra co-stato e stato, cioè

$$p(t) = -P(t)x(t), \quad P \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

da cui si ha immediatamente $\dot{p} = -\dot{P}x + -P\dot{x}$. Sostituendo le espressioni sopra trovate, si ottiene

$$-\dot{P} = A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P$$

cioè una equazione differenziale matriciale non-lineare (quadratica) in P , detta *equazione differenziale di Riccati* (DRE).

La DRE determina, assieme alla condizione terminale $p(T) = -Fx(T) = -P(T)x(T)$ cioè $P(T) = F$, l'andamento di $P(t)$ e quindi del controllo ottimo in retroazione $\hat{u} = -R^{-1}B^T P(t)x$.

È possibile dimostrare che la soluzione della DRE valutata al tempo iniziale $P(0)$ dà proprio il costo minimo per il problema dato, cioè $\min_u J = \frac{1}{2}x^T(0)P(0)x(0)$.

Si noti che, essendo sia $P(T)$ che $\dot{P}(T)$ simmetriche, $P(t)$ è simmetrica per ogni T . Essendo il costo minimo mai negativo, deve anche risultare che $P(0)$ è almeno semi-definita positiva.

La soluzione così trovata ha come svantaggio, oltre alla difficoltà della soluzione della equazione differenziale di Riccati, la dipendenza esplicita dal tempo della legge di retroazione ottima (che rende il sistema lineare ma tempo-variante).

Una soluzione più pratica si ottiene cercando la soluzione al problema del controllo ottimo con orizzonte temporale T molto lungo. In questo caso, la soluzione retrograda di $P(t)$, che vale F al tempo T , può essere illimitata per $t \rightarrow 0$, oppure può oscillare indefinatamente, o infine può portarsi ad un valore costante. Se quest'ultimo è il caso, deve verificarsi in uno dei valori di equilibrio che sono dati dalle soluzioni della *equazione algebrica di Riccati* (ARE):

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0.$$

Questo è un sistema di equazioni quadratiche in $n(n+1)/2$ incognite (P è simmetrica), quindi ci possiamo aspettare una pluralità di soluzioni possibili. Una discussione completa delle soluzioni è complessa per queste note: alcune osservazioni risultano però abbastanza intuitive.

Se la coppia A, B è stabilizzabile (se cioè il sottosistema non raggiungibile è asintoticamente stabile), allora esiste un controllo che fa convergere l'indice J ad un valore finito;

In questa ipotesi, tra le soluzioni della ARE ne esiste una s.d.p. che corrisponde al valore limite P_0 cui tende la equazione differenziale di Riccati con $P(T) = F = 0$. Questa soluzione definisce una legge di retroazione costante $u = R^{-1}B^T P_0 x$, che rende minimo l'indice $J = \int_0^\infty \frac{1}{2}(x^T Q x + u^T R u) dt$. Ogni altra soluzione simmetrica e s.d.p. \bar{P} della ARE è "più grande" di P_0 , nel senso che la matrice $\bar{P} - P_0$ è s.d.p.;

Se la matrice Q che pesa gli stati nell'indice è solo semidefinita positiva, vi sono stati o combinazioni di stati la cui evoluzione non influenza il costo. È pertanto possibile che una legge di retroazione ottima possa non essere stabilizzante, se gli stati non pesati da Q sono di per sé instabili, in quanto il costo del controllo necessario a stabilizzarli penalizza l'indice. È peraltro possibile che la ARE abbia soluzioni s.d.p. stabilizzanti, che non sono ottime. Queste potranno essere comunque di grande interesse, come ovvio;

Se scriviamo (come è sempre possibile fare per matrici s.d.p.) $Q = C^T C$ con $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq \text{rank}(C) = \text{rank}(Q)$, e poniamo $y = Cx$, l'indice risulta

$$J = \int_0^\infty \frac{1}{2}(y^T y + u^T R u) dt$$

Stiamo quindi guardando ad un equivalente problema in cui si pesano le evoluzioni di ingresso e uscita per un sistema con terna (A, B, C) ;

Il caso in cui tutta la evoluzione di un particolare stato iniziale stia nel nullo di Q coincide chiaramente con la inosservabilità del corrispondente modo per la coppia (A, C) , se $Q = C^T C$.

Sia la coppia (A, B) stabilizzabile e $Q = C^T C$. Si ha che:

- la soluzione P_0 ottimizzante della ARE è definita positiva *se e solo se* la coppia (A, C) è osservabile;
- la soluzione s.d.p ottimizzante P_0 della ARE dà luogo ad una reazione stabilizzante *se e solo se* (A, C) è detettabile (se cioè il sottosistema non osservabile è asintoticamente stabile);
- se la soluzione ottimizzante P_0 è stabilizzante, allora questa è l'unica soluzione simmetrica s.d.p. della ARE;

Inoltre, per le soluzioni stabilizzanti vale quanto segue. Sia la coppia (A, B) stabilizzabile e $Q = C^T C$:

- una soluzione P_s simmetrica e s.d.p stabilizzante della ARE, se esiste, è unica, e coincide con il valore limite cui tende la equazione differenziale di Riccati con condizioni finali $P(T) = F$ qualsiasi, purché p.d..
- tale soluzione esiste se e solo se il sottosistema non osservabile non ha alcun autovalore marginalmente stabile;
- qualsiasi altra matrice di retroazione stabilizzante dà un costo maggiore di quello ottenuto utilizzando P_s .

1.4.1 Controllo LQR in Tempo Discreto

La formulazione e le soluzioni del problema di regolazione ottima con indice quadratico sono simili anche nel caso di sistemi tempo-discreti. Sia infatti dato il sistema

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \quad x(0) = x_0, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$$

e l'indice

$$J = \frac{1}{2} x^T(T) F x(T) + \sum_{t=0}^{T-1} \frac{1}{2} (x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t))$$

con matrice R positiva definita e Q ed F almeno semidefinite positive.

Si dimostra che il controllo ottimo in retroazione è ancora una volta lineare, ed è determinato in questo caso da

$$\hat{u}(t) = K(t)x(t) = - [R + B^T P(t+1)B]^{-1} B^T P(t+1)Ax(t)$$

dove la matrice P è ora la soluzione della *equazione di Riccati alle differenze (all'indietro)*,

$$P(t) = Q + A^T P(t+1)A + A^T P(t+1)B [R + B^T P(t+1)B]^{-1} B^T P(t+1)A$$

con $P(T) = F$.

La soluzione a regime, per $T \rightarrow \infty$, di questa equazione tende anche in questo ad una soluzione della opportuna *equazione algebrica di Riccati*, data da

$$P = Q + A^T P A + A^T P B [R + B^T P B]^{-1} B^T P A$$

La discussione delle proprietà delle soluzioni ottimizzanti e stabilizzanti della ARE, in relazione alle proprietà di stabilizzabilità e detettabilità del sistema (A, B, C) con $Q = C^T C$, sono del tutto analoghe al caso tempo continuo.

1.4.2 Controllo LQR in Matlab

Matlab fornisce alcune funzioni per il calcolo delle matrici del controllo ottimo lineare quadratico. Il comando

```
[K,P,E] = LQR(A,B,Q,R,N)
```

calcola la matrice di retroazione K tale che $u = -Kx$ minimizza il costo $J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u + 2x^T N u) dt$ per il sistema $\dot{x} = Ax + Bu$. La matrice N indica pesi incrociati, ed è posta uguale a zero se non indicata esplicitamente. Come risultato della chiamata si ha anche la matrice P soluzione della ARE, ed il vettore E degli autovalori del sistema in anello chiuso, cioè di $A - BK$.

Si osservi che il comando LQR di Matlab fornisce solo l'unica soluzione simmetrica stabilizzante della ARE, laddove possibile (si guardi a tal proposito la documentazione del comando CARE). Alcuni semplici ma interessanti casi:

Esempio 1)

```
A=[2 0; 0 1]; B = [0;1]; Q=[0 0; 0 1]; R=1; [K,S,E] = lqr(A,B,Q,R);
??? Error using ==> lti/lqr
(A,B) is unstabilizable.
```

Se il sistema non è stabilizzabile, non esiste ovviamente una P_s (anche se esiste una P_0 ed una retroazione ottimizzante).

Esempio 2)

```
A=[-1 0; 0 3]; B = [0;1]; Q=[1 0; 0 0]; R=1; [K,S,E] = lqr(A,B,Q,R)
K =      0      6
S =      0.5000      0
      0      6.0000
E =     -1
      -3
```

Si osserva qui che il comando LQR fornisce la reazione stabilizzante. La reazione ottima sarebbe invece $K = [0 \ 0]$, in quanto il secondo stato è inosservabile per A, C , con $C = [1 \ 0]$, $Q = C^T C$.

Esempio 3)

```
A=[-1 0; 0 0]; B = [1;1]; Q=[1 0; 0 0]; R=1; [K,S,E] = lqr(A,B,Q,R)
??? Error using ==> lti/lqr
(A,B) or (Q-N/R*N',A-B/R*N') has non minimal modes near imaginary axis.
```

In questo caso, una soluzione stabilizzante della ARE non esiste, anche se il sistema è stabilizzabile. Matlab non fornisce la soluzione ottima, che sarebbe marginalmente stabile.

1.4.3 Allocazione ottima degli autovalori

Sulla base di quanto visto in precedenza, possiamo chiederci in quale posizioni il controllo ottimo LQR tende a piazzare i poli del sistema in anello chiuso.

È innanzitutto importante osservare che gli autovalori del sistema in anello chiuso (cioè di $A - BK_s$, con $K_s = R^{-1} B^T P_s$) sono strettamente legati agli autovalori della matrice Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} A & BR^{-1}B^T \\ Q & -A^T \end{bmatrix}$$

sopra introdotta per la dinamica del sistema stato/co-stato. Infatti, applicando una trasformazione di similarità definita dalla matrice

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ P_s & I \end{bmatrix},$$

con P_s soluzione stabilizzante della ARE, si ottiene

$$\begin{aligned} T\mathcal{H}T^{-1} &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ P_s & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & BR^{-1}B^T \\ Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -P_s & I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A - BR^{-1}B^T P_s & BR^{-1}B^T \\ P_s A + Q - P_s BR^{-1}B^T P_s + A^T P_s & -P_s BR^{-1}B^T - A^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK_s & BR^{-1}B^T \\ 0 & -(A - BK_s)^T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

da cui si deduce che gli autovalori di \mathcal{H} comprendono quelli di $A - BK_s$ (che sono stabili, per definizione) ed i loro simmetrici rispetto all'asse immaginario.

1.4.4 Sistemi SISO

Consideriamo adesso un sistema strettamente proprio ad un solo ingresso ed una sola uscita

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + bu \\ y &= cx\end{aligned}$$

la cui funzione di trasferimento sia $G(s) = c(sI - A)^{-1}b = \frac{n(s)}{d(s)}$. Siano n e m rispettivamente il numero dei poli e degli zeri di $g(s)$. Scegliamo come matrice di peso dello stato $Q = c^T c$, di modo che l'indice obiettivo vale

$$J = \int_0^\infty (y^2 + ru^2) dt.$$

Il controllo ottimo in retroazione vale in questo caso

$$u = -\frac{1}{r} b^T P_s x$$

dove P_s è la soluzione stabilizzante della ARE

$$PA + A^T P - \frac{1}{r} P b b^T P + Q = 0$$

Gli autovalori della matrice Hamiltoniana sono le soluzioni di

$$\Delta(s) = \det \begin{bmatrix} sI - A & -\frac{bb^T}{r} \\ -c^T c & sI + A^T \end{bmatrix} = 0$$

Applicando la regola del determinante di una matrice a blocchi:

$$\det \begin{bmatrix} F & J \\ H & G \end{bmatrix} = \det F \det[G - HF^{-1}J], \quad F \text{ nonsingolare}$$

si ottiene

$$\Delta(s) = \det(sI - A) \det[I + c^T c(sI - A)^{-1} b r^{-1} b^T (sI + A^T)^{-1}] \det(sI + A^T)$$

Osservando infine che $g(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{c \operatorname{adj}(sI - A)^{-1} b}{\det(sI - A)}$, si trova

$$\Delta(s) = d(s)d(-s) + \frac{1}{r} n(s)n(-s).$$

Da questa relazione, che conferma come gli autovalori della Hamiltoniana sono simmetrici rispetto all'asse immaginario oltreché all'asse reale, si ottiene una chiara interpretazione della posizione ottima dei poli in anello chiuso al variare del costo r del controllo.

Applicando le regole del luogo delle radici, infatti, è immediato osservare che per

$$\Delta(s) = d(s)d(-s) + \frac{1}{r}n(s)n(-s)$$

vele:

- quando $r \rightarrow \infty$, le radici della $\Delta(s) = 0$ coincidono con le radici di $d(s)$ (poli in anello aperto del sistema) e di $d(-s)$ (i simmetrici rispetto all'asse immaginario). Gli autovalori del sistema in anello chiuso che usa una retroazione stabilizzante ottima, quando il costo del controllo è molto alto, tendono quindi agli autovalori del sistema stesso in anello aperto se stabili, oppure al loro simmetrico se instabili;
- quando $r \rightarrow 0$, le radici della $\Delta(s) = 0$ coincidono con le radici di $n(s)$ (zeri del sistema) e di $n(-s)$ (i simmetrici). Inoltre, un numero di rami del luogo pari alla differenza poli-zeri $2(n - m)$ tende a infinito, lungo asintoti che dividono il piano in settori uguali. Tra questi, solo quelli a parte reale negativa sono poli del sistema in anello chiuso.

Più precisamente, possiamo scrivere per le radici che tendono a infinito la relazione

$$s^{2(n-m)} = (-1)^{n-m+1} \frac{b_m^2}{r}$$

con $n(s) = b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0$. Le radici stanno quindi su un cerchio di raggio $(b_m^2/r)^{1/2(n-m)}$, in una disposizione angolare caratteristica in cui gli asintoti formano angoli di $\pi/(n-m)$ tra loro, nota dalla teoria dei filtri come "Butterworth".

Esempio

Si consideri un sistema costituito da due masse m_1, m_2 in moto rettilineo, collegate tra loro da una molla dicostante k . Sia u la forza agente su una massa, e sia y la posizione della seconda massa. La funzione di trasferimento tra queste grandezze è data da

$$g(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{s^2[m_1 m_2 s^2 + k(m_1 + m_2)]},$$

ovvero, se (in opportune unità di misura) $m_1 = m_2 = 1$ e $k = 1$,

$$g(s) = \frac{1}{s^2(s^2 + 2)}.$$

Sia l'indice $J = \int_0^\infty (y^2 + ru^2)dt$, allora il luogo simmetrico delle radici è definito dalla equazione

$$1 + \frac{1}{r} \frac{1}{s^4(s^2 + 2)^2} = 0$$

e possiede otto asintoti, spaziati di $\pi/4$

Capitolo 2

Stima Ottima

2.1 Probabilità, Variabili Aleatorie e Processi Stocastici

2.1.1 Probabilità

Si consideri un evento E , possibile risultato di una prova casuale. Indichiamo con $Pr(E)$ la probabilità di questo evento, cioè il limite tra il numero delle volte in cui E si verifica ed il numero di prove, quando quest'ultimo tende a infinito.

Se $E_i, i = 1, 2, \dots, n$ sono i possibili esiti della prova, si ha

$$0 \leq Pr(E_i) \leq 1$$

e

$$\sum_{i=1}^n Pr(E_i) = 1.$$

L'evento che A ed B accadano entrambe viene indicato con AB , e la probabilità di un tale evento congiunto è $Pr(AB)$. Se gli eventi sono indipendenti, la probabilità congiunta è il prodotto delle probabilità dei singoli eventi:

$$Pr(AB) = Pr(A)Pr(B) \quad (\text{per eventi indipendenti})$$

L'evento che accada alternativamente A o B viene indicato con $A + B$. Per tale probabilità composta si ha

$$Pr(A + B) = Pr(A) + Pr(B) - Pr(AB).$$

Chiaramente, se due eventi sono mutuamente esclusivi si ha $Pr(AB) = 0$, quindi

$$Pr(A + B) = Pr(A) + Pr(B) \quad (\text{per eventi mutuamente esclusivi}).$$

Per eventi non indipendenti, è utile definire una *probabilità condizionale*. La probabilità che accada A , dato che B sia accaduto, si indica con $Pr(A|B)$ ed è data da

$$Pr(A|B) = \frac{Pr(AB)}{Pr(B)}.$$

Appare chiaro che, se A ed B sono indipendenti, la probabilità condizionale torna ad essere semplicemente $Pr(A)$. Riscrivendo la stessa relazione scambiando il ruolo degli eventi, si ottiene facilmente che

$$Pr(A|B)Pr(B) = Pr(B|A)Pr(A),$$

da cui

$$Pr(A|B) = \frac{Pr(B|A)Pr(A)}{Pr(B)}.$$

Generalizzando al caso in cui vi siano n possibili esiti A_i dell'esperimento, e considerando che

$$Pr(B) = Pr(B|A_1)Pr(A_1) + Pr(B|A_2)Pr(A_2) + \dots + Pr(B|A_n)Pr(A_n),$$

si ha l'equazione

$$Pr(A_i|B) = \frac{Pr(B|A_i)Pr(A_i)}{\sum_{i=1}^n Pr(B|A_i)Pr(A_i)},$$

nota come *Teorema di Bayes*.

Esempi

Si considerino alcuni esperimenti ottenuti lanciando dadi a sei facce.

Probabilità:

Esperimento: lancio di un dado A

Evento: $A = j$ ($j = 1, 2, \dots, 6$)

$Pr(A = j) = 1/6$.

Eventi congiunti indipendenti:

Esperimento: lancio di due dadi, A e B

Evento congiunto: il valore del primo dado è $A = i$ e quello del secondo è

$B = j$

$Pr((A = i)(B = j)) = 1/36$.

Eventi mutuamente esclusivi:

Esperimento: lancio di un dado

Evento: il valore del dado è $A = i$ oppure $A = j$ ($i \neq j$)

$$Pr((A = i) + (A = j)) = 1/6 + 1/6 = 1/3.$$

Eventi non mutuamente esclusivi:

Esperimento: lancio di due dadi, A e B

Evento: il valore di almeno uno dei dadi è i

$$Pr((A = i) + (B = i)) = Pr(A = i) + Pr(B = i) - Pr((A = i)(B = i)) = 1/6 + 1/6 - 1/36 = 11/36.$$

Probabilità condizionale:

Esperimento: lancio di tre dadi, A, B e C

Eventi:

E_1) due e solo due dadi hanno valore i

E_2) $A = i$, B e C qualsiasi valore

$$Pr(E_1) = Pr(A = i)Pr(B = i)Pr(C \neq i) + Pr(A = i)Pr(B \neq i)Pr(C = i) + Pr(A \neq i)Pr(B = i)Pr(C = i) = 3\left(\frac{1}{6}\frac{1}{6}\frac{5}{6}\right) = 5/72;$$

$$Pr(E_2) = 1/6;$$

$$Pr(E_1E_2) = Pr(A = i)Pr(B = i)Pr(C \neq i) + Pr(A = i)Pr(B \neq i)Pr(C = i) = 2\left(\frac{1}{6}\frac{1}{6}\frac{5}{6}\right) = 5/108;$$

$$Pr(E_1|E_2) = \frac{Pr(E_1E_2)}{Pr(E_2)} = 5/18 = 4Pr(E_1).$$

Quindi, E_1 dipende in probabilità da E_2 : se il primo dado vale i , le probabilità che accada E_1 sono quattro volte maggiori.

2.1.2 Variabili Casuali

Una variabile scalare aleatoria, o *random*, nella sua accezione più semplice è una variabile continua $\xi \in \mathbb{R}$ che assume valori in un certo insieme, con probabilità diverse per i diversi valori. Questa probabilità viene specificata da una funzione $F(x) : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ detta *distribuzione di probabilità* e definita come

$$F(x) = Pr(\xi \leq x).$$

La derivata di una distribuzione di probabilità,

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx},$$

viene detta *densità di probabilità*. Si ha naturalmente che

$$F(x) = \int_{-\infty}^x du[f(u)],$$

così come ovviamente vale

$$F(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} du[f(u)] = 1.$$

Dalla definizione di densità di probabilità segue che

$$f(x) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{Pr(x < \xi < x + dx)}{dx},$$

ovvero $f(x)$ è finita se la probabilità che il valore aleatorio cada tra x e dx è un infinitesimo dell'ordine di dx .

Questo è quanto succede in molti casi. Quando però la variabile aleatoria può assumere alcuni valori isolati $x_i \in \mathbb{R}$ con probabilità p_i , si devono introdurre distribuzioni generalizzate, contenenti funzioni impulsive o δ di Dirac, tali che la densità di probabilità in x_i è data da $p_i\delta(x - x_i)$. Ad esempio, volendo considerare gli esiti dell'esperimento del lancio di un dado come valori reali, la relativa distribuzione di probabilità sarebbe $f(x) = \sum_{i=1}^6 \frac{1}{6}\delta(x - i)$.

Si osservi che per la nota proprietà delle funzione di Dirac, per la quale se $g(x)$ è una funzione a valori finiti continua in x_0 vale

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx [g(x)\delta(x - x_0)] = g(x_0),$$

si ha immediatamente che, nel caso di una distribuzione generalizzata in cui coesista una distribuzione continua $f(x)$ e un certo numero di valori isolati x_i con probabilità p_i , si avrà

$$F(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} du \left[f(u) + \sum_i p_i \delta(u - x_i) \right] = 1.$$

Nel caso di più variabili casuali si definisce un distribuzione di probabilità congiunta. Ad esempio, per due variabili $(\xi, \zeta) \in \mathbb{R}^2$, si definisce $F_{2d}(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ come

$$F_{2d}(x, y) = Pr(\xi \leq x \text{ and } \zeta \leq y).$$

La densità di probabilità congiunta vale corrispondentemente

$$f_{2d}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{2d}(x, y)}{\partial x \partial y},$$

Da questa densità congiunta si possono ricavare semplicemente le distribuzioni e densità individuali delle variabili:

$$F_{\xi}(x) = F_{2d}(x, \infty), \quad F_{\zeta}(y) = F_{2d}(\infty, y),$$

$$f_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dy [f_{2d}(x, y)], \quad f_{\zeta}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} dx [f_{2d}(x, y)],$$

dove i pedici ξ e ζ indicano che si tratta di funzioni diverse di variabili diverse.

Si noti che, se ξ e ζ sono indipendenti, l'evento $(\xi \leq x)$ è indipendente dall'evento $(\zeta \leq y)$, quindi

$$\begin{aligned} F_{2d}(x, y) &= Pr(\xi \leq x \text{ and } \zeta \leq y) \\ &= Pr(\xi \leq x)Pr(\zeta \leq y) = F_{\xi}(x)F_{\zeta}(y), \end{aligned}$$

e di conseguenza

$$f_{2d}(x, y) = f_{\xi}(x)f_{\zeta}(y).$$

2.1.3 Valori Attesi e Statistiche di Variabili Casuali

Il valore atteso di una variabile aleatoria è definito come la somma di tutti i valori che la variabile può assumere, pesata per la probabilità con la quale questi valori possono essere assunti. Per variabili continue, il concetto di somma è esteso in integrazione.

Per una variabile scalare $\xi \in \mathbb{R}$ casualmente distribuita con densità $f(x)$ si definisce quindi il valore atteso $E[\xi] \in \mathbb{R}$ come

$$E[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} dx [xf(x)].$$

Il valore atteso è anche detto *valor medio* di ξ , o *media* della distribuzione di ξ , o ancora *momento primo* di ξ . È immediata la analogia tra il valore atteso ed il baricentro di una distribuzione di masse con densità data da $f(x)$.

Il valore atteso di una variabile aleatoria multidimensionale è definito analogamente.

Per n variabili aleatorie $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, distribuite con densità $f_{nd}(x)$, si ha

$$E[\xi] = \begin{bmatrix} \int dx_1 \int dx_2 \cdots \int dx_n [x_1 f_{nd}(x)] \\ \vdots \\ \int dx_1 \int dx_2 \cdots \int dx_n [x_n f_{nd}(x)] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

dove, come faremo in seguito, si sono omissi gli estremi $(-\infty, \infty)$ di integrazione per semplicità di notazione.

Si consideri una funzione $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, e sia $\xi \in \mathbb{R}$ una variabile aleatoria con densità $f(x)$. Allora anche $\zeta = g(\xi)$ è una variabile aleatoria, il cui valore atteso è dato da

$$E[\zeta] = E[g(\xi)] = \int_{-\infty}^{\infty} dx [g(x)f(x)].$$

Ad esempio, per una funzione lineare $g(\xi) = a\xi + b$, con a e b costanti non aleatorie, si ha

$$E[a\xi + b] = \int_{-\infty}^{\infty} dx [(ax + b)f(x)] = aE[\xi] + b.$$

Per una somma di variabili aleatorie $g(\xi, \zeta) = \xi + \zeta$, si ha

$$\begin{aligned} E[\xi + \zeta] &= \int dx \int dy [(x + y)f_{2d}(x, y)] \\ &= \int dx [x \int dy [f_{2d}(x, y)]] + \int dy [y \int dx [f_{2d}(x, y)]] \\ &= \int dx [xf_{\xi}(x)] + \int dy \int dx [yf_{2d}(x, y)] \\ &= \int dx [xf_{\xi}(x)] + \int dy [y \int dx [f_{2d}(x, y)]] \\ &= E[\xi] + E[\zeta] \end{aligned}$$

Per variabili aleatorie *indipendenti*, ricordando che $f_{2d}(x, y) = f_{\xi}(x)f_{\zeta}(y)$, il valore atteso di un prodotto è pari al prodotto dei valori attesi:

$$E[\xi\zeta] = E[\xi]E[\zeta] \quad (\text{per variabili indipendenti}),$$

Alcune funzioni di variabile aleatoria sono particolarmente importanti, perchè permettono di rappresentare concisamente alcune notevoli caratteristiche delle distribuzioni cui corrispondono. Queste funzioni vengono dette *statistiche* della variabile aleatoria. Ad esempio, una funzione frequentemente usata è il *valore quadratico medio*, o *momento secondo*, di una distribuzione, dato da

$$E[\xi^2] = \int dx [x^2 f(x)],$$

o la sua radice $\sqrt{E[\xi^2]}$, detta *valore rms* (da *root-mean-squared*).

La *varianza* di una variabile aleatoria è lo scarto quadratico medio tra la variabile ed la sua media, indicata da σ^2 e data da

$$\sigma^2 = \int dx [(x - E[\xi])^2 f(x)] = E[\xi^2] - E[\xi]^2.$$

La radice quadrata σ della varianza è detta *deviazione standard* della variabile aleatoria. Deviazione standard e valore rms coincidono per variabili a media nulla.

La analogia con i corpi a massa distribuita introdotta sopra a proposito dei baricentri, può ovviamente essere estesa assimilando la varianza al momento di inerzia della distribuzione di massa rispetto ad un asse passante per il baricentro.

Per variabili aleatorie *indipendenti*, la varianza della somma $\psi = \xi + \zeta$ è pari alla somma delle varianze

$$\sigma_{\psi}^2 = \sigma_{\xi}^2 + \sigma_{\zeta}^2 \quad (\text{per variabili indipendenti}).$$

Un concetto molto importante è quello di *correlazione statistica* tra variabili aleatorie. Una indicazione parziale di quanto una variabile sia legata ad un'altra è data dalla *covarianza*, cioè il valore atteso del prodotto delle deviazioni di due variabili dalla loro media:

$$\begin{aligned} C(\xi, \zeta) &= E[(\xi - E[\xi])(\zeta - E[\zeta])] \\ &= \int dx \int dy [(x - E[\xi])(y - E[\zeta]) f_{2d}(x, y)] \\ &= E[\xi\zeta] - E[\xi]E[\zeta] \end{aligned}$$

La covarianza, normalizzata per le deviazioni standard delle variabili, è detta *coefficiente di correlazione*

$$\rho = \frac{C(\xi, \zeta)}{\sigma_\xi \sigma_\zeta},$$

ed è un indice della dipendenza lineare tra le variabili. Infatti, $\rho = 0$ se le variabili sono indipendenti (non vale l'inverso), mentre $\rho = \pm 1$ se ζ è una funzione lineare di ξ . Se si cerca di approssimare ζ con una funzione lineare di ξ , il minimo possibile errore quadratico medio di approssimazione vale $\sigma_\zeta^2(1 - \rho^2)$.

In modo più generale, per una variabile aleatoria multidimensionale $x \in \mathbb{R}^n$ a valor medio $E[x] = m$, si definisce una *matrice di covarianza* $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ data da

$$P = E[(x - m)(x - m)^T].$$

Esplicitamente possiamo scrivere

$$P = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & C(x_1, x_2) & \cdots & C(x_1, x_n) \\ C(x_2, x_1) & \sigma_2^2 & \cdots & C(x_2, x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C(x_n, x_1) & C(x_n, x_2) & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}.$$

La matrice di covarianza ha quindi in posizione i, i sulla diagonale la varianza della componente i -esima del vettore aleatorio, e in posizione i, j la covarianza tra la componente i -esima e la j -esima. La matrice di covarianza è quindi ovviamente simmetrica.

2.1.4 Distribuzioni Uniformi e Normali

Due tipi di distribuzioni hanno per noi massima importanza.

La distribuzione uniforme ha densità costante f in un intervallo finito di misura $1/f$, e nulla altrove.

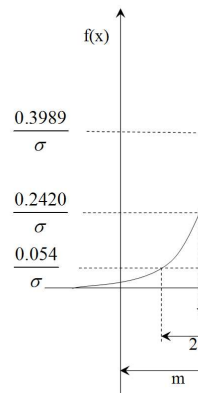
La distribuzione normale è caratterizzata da una funzione densità di probabilità che ha un unico massimo nel valore medio m , e decresce esponenzialmente allontanandosi da quel valore, tanto più rapidamente quanto minore è

La espressione analitica della densità è data da

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right].$$

la deviazione standard σ (vedi figura).

Naturalmente, l'area sottesa dalla curva è unitaria. L'area compresa tra $m - \sigma$ e $m + \sigma$ vale circa 0.68, mentre tra $m - 2\sigma$ e $m + 2\sigma$ si trova un area di circa 0.95. In altri termini, la probabilità che il risultato di un esperimento differisca più di 2σ dal valor medio (di un gran numero di misure) è del 5%.



Si può dimostrare che la distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria somma di due variabili a distribuzione normale, è anch'essa a distribuzione normale.

Si può inoltre dimostrare che, sotto alcune ipotesi, la distribuzione della somma di un gran numero di variabili aleatorie indipendenti tende ad una distribuzione normale, *a prescindere* dalle distribuzioni delle variabili sommate. Questo risultato va sotto il nome di *teorema del limite centrale*, ed è spesso usato (assieme al fatto empirico che molte variabili aleatorie appaiono distribuite normalmente) per giustificare la ipotesi di normalità delle distribuzioni di probabilità per le variabili di molti problemi.

Una distribuzione normale per una variabile multidimensionale $x \in \mathbb{R}^n$, è definita dal suo valor medio $m \in \mathbb{R}^n$ e dalla matrice di covarianza P attraverso la espressione

$$f_{nd}(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \|P\|}} \exp \left[-\frac{1}{2} (x-m)^T P^{-1} (x-m) \right].$$

2.2 Processi Aleatori

Un processo aleatorio può essere pensato come un insieme di funzioni del tempo, ciascuna delle quali potrebbe essere l'esito di una particolare esecuzione di un dato esperimento.

Indichiamo l'insieme con $\{x(t)\}$, mentre $x(t)$ indicherà un elemento dell'insieme. Il valore misurato in un particolare istante t sarà una variabile aleatoria, la quale ha una sua densità di probabilità che indicheremo (esplicitando l'istante di misura) con $f(x, t_1)$.

Queste distribuzioni possono descrivere la escursione che la misura può avere in ogni singolo istante, ma non dare un senso di quanto velocemente questi valori possano cambiare nel tempo. Per andare in questa direzione, si definisce una funzione di *autocorrelazione* data da

$$\phi_{xx}(t_1, t_2) = E[x(t_1)x(t_2)] = \int dx_1 \int dx_2 [x_1 x_2 f_{2d}(x_1, t_1; x_2, t_2)]$$

e una funzione di *cross-correlazione* data da

$$\phi_{xy}(t_1, t_2) = E[x(t_1)y(t_2)] = \int dx \int dy [xy f_{2d}(x, t_1; y, t_2)].$$

Se per i valori medi vale $E[x(t_1)] = E[x(t_2)] = 0$, la autocorrelazione coincide quindi con la covarianza delle due variabili - misure del processo - a tempi diversi.

Se si considerano processi aleatori $\{x(t)\}$ multidimensionali (con $x(t) \in \mathbb{R}^n$), si definisce una *matrice di cross-correlazione* data da

$$\Phi(t_1, t_2) = E[x(t_1)x(t_2)^T] = \begin{bmatrix} \phi_{x_1 x_1}(t_1, t_2) & \phi_{x_1 x_2}(t_1, t_2) & \cdots & \phi_{x_1 x_n}(t_1, t_2) \\ \phi_{x_2 x_1}(t_1, t_2) & \phi_{x_2 x_2}(t_1, t_2) & \cdots & \phi_{x_2 x_n}(t_1, t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{x_n x_1}(t_1, t_2) & \phi_{x_n x_2}(t_1, t_2) & \cdots & \phi_{x_n x_n}(t_1, t_2) \end{bmatrix}.$$

2.2.1 Processi Stazionari e Processi Ergodici

Un processo aleatorio si dice *stazionario* se le sue proprietà statistiche sono invarianti nel tempo. Ciò significa ad esempio che il valor medio $E[x(t_1)]$ o il valore quadratico medio $E[x^2(t_1)]$ degli elementi dell'insieme ad un dato tempo sono costanti.

La stazionarietà implica inoltre che la correlazione tra i valori ai tempi t e $t + \tau$ non dipenda da t , ma solo da τ .

Un processo aleatorio stazionario si dice poi *ergodico* se ogni statistica calcolata facendo la media sugli elementi dell'insieme ad un dato istante di tempo, può essere anche calcolata facendo la media nel tempo per i valori di un singolo elemento rappresentativo dell'insieme.

L'ipotesi di ergodicità non è sempre verificata. Si consideri ad esempio l'insieme delle funzioni costanti a valori aleatori: nessun elemento di questo

insieme può dare medie che rappresentino l'intero insieme, cioè non esiste un elemento rappresentativo.

In molti casi pratici, però, la ipotesi di ergodicità vale, o può essere presunta. Le statistiche più comuni si calcolano, per i processi ergodici, come segue:

$$\begin{aligned} E[x] &= \frac{1}{2T} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T dt x(t) \\ E[x^2] &= \frac{1}{2T} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T dt x^2(t) \\ \phi_{xx}(\tau) &= \frac{1}{2T} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T dt x(t) x(t + \tau) \\ \phi_{x_i x_j}(\tau) &= \frac{1}{2T} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T dt x_i(t) x_j(t + \tau). \end{aligned}$$

È ovvio che in molti casi pratici, l'unica caratterizzazione diretta sperimentale delle statistiche di un processo può solo essere fatta utilizzando dati provenienti dalla misura nel tempo degli esiti di una particolare istanza del processo, e quindi mediante approssimazioni di queste formule, basandosi sulla ipotesi ergodica.

Un esempio di processo ergodico è dato da un insieme di sinusoidi, di data ampiezza A e frequenza ω $\{x(t) = A \sin(\omega t + \theta)\}$, con sfasamento θ uniformemente distribuito ($f(\theta) = 1/2\pi$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$). Si può verificare in questo caso che calcolando la autocorrelazione secondo la definizione

$$\phi_{xx}(\tau) = \int_0^{2\pi} d\theta \left[A \sin(\omega t + \theta) A \sin(\omega t + \omega\tau + \theta) \frac{1}{2\pi} \right]$$

(dove $t = \text{cost.}$) o come media su un particolare elemento

$$\phi_{xx}(\tau) = \frac{1}{2T} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T dt [A \sin(\omega t + \theta) A \sin(\omega t + \omega\tau + \theta)]$$

(qui con $\theta = \text{cost.}$) si ottiene lo stesso risultato $\phi_{xx}(\tau) = 1/2A^2 \cos \omega\tau$.

Un processo si dice *gaussiano* se tutte le sue distribuzioni di ogni ordine sono normali. Essendo una distribuzione normale completamente individuata dalla sua media m e dalla sua covarianza P , la conoscenza di $m(\tau)$ e $P(\tau)$ permette di caratterizzare completamente un processo dal punto di vista statistico. Vedremo inoltre che l'uscita di un sistema lineare, soggetto ad un ingresso gaussiano, è anch'essa gaussiana. È questo grande vantaggio analitico, assieme al teorema del limite centrale, che garantiscono la importanza dei processi gaussiani. Per un processo gaussiano a media m e covarianza P si usa spesso la notazione concisa

$$x \sim N(m, P).$$

Alcune operazioni analitiche su processi aleatori vengono facilitate dall'utilizzo di trasformate. In particolare è utile la trasformata bilatera di Fourier

della funzione di autocorrelazione,

$$\Phi_{xx}(\omega) \stackrel{def}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau,$$

che viene detta *densità spettrale di potenza*, e la trasformata della cross-correlazione

$$\Phi_{xy}(\omega) \stackrel{def}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Si consideri un sistema lineare con funzione di trasferimento $G(s)$, al cui ingresso sia applicato un processo aleatorio $\{u(t)\}$. Si ottiene facilmente che la uscita è un processo aleatorio $\{z(t)\}$, e che vale

$$\Phi_{uz}(\omega) = G(j\omega)\Phi_{uu}(\omega)$$

$$\Phi_{zz}(\omega) = |G(j\omega)|^2\Phi_{uu}(\omega)$$

Rumore bianco

Un processo di particolare importanza teorica è il cosiddetto *rumore bianco*, nel quale i valori in istanti diversi non hanno alcuna correlazione tra loro, cioè tale per cui

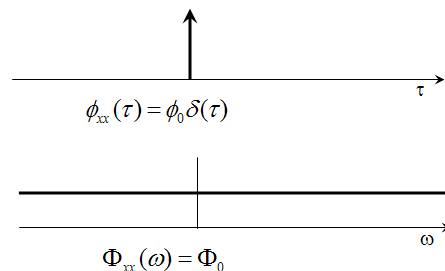
$$\phi_{xx}(\tau) = \Phi_0\delta(\tau).$$

Il nome “rumore bianco” deriva dal fatto che la densità spettrale di potenza è costante. Infatti si ha immediatamente

$$\Phi_{xx}(\omega) = \Phi_0,$$

ovvero il processo ha “potenza” (qui intesa come valore quadratico) distribuita uniformemente a tutte le frequenze.

Nonostante il rumore bianco sia una idealizzazione (la ampiezza della autocorrelazione in $\tau = 0$, cioè il valore quadratico medio della variabile aleatoria in un dato istante, sarebbe infatti infinita), è un concetto molto utile per modellare fenomeni quali il rumore in componenti elettroniche. Molti altri processi aleatori sono modellabili con rumore bianco filtrato da sistemi lineari.



2.3 Filtraggio Ottimo

2.3.1 Un semplice esempio

Si considerino due sensori che compiono due misure, z_1 e z_2 , di una quantità costante ma incognita x , in presenza di errori di misura v_1, v_2 aleatori, indipendenti e a media nulla. Si desidera progettare un algoritmo di elaborazione dei dati che combini le due misure per produrre la migliore stima di x . Le misure sono

$$\begin{aligned} z_1 &= x + v_1 \\ z_2 &= x + v_2 \end{aligned}$$

In assenza di altre informazioni, possiamo cercare di trovare una stima \hat{x} che sia una combinazione lineare delle stime, cioè

$$\hat{x} = k_1 z_1 + k_2 z_2,$$

con k_1, k_2 da scegliere opportunamente. Definito l'errore di stima,

$$\tilde{x} = \hat{x} - x,$$

scegliamo come criterio di ottimalità la minimizzazione del valore quadratico medio di \tilde{x} .

Inoltre, essendo x incognito, ci è imposto che la scelta di k_1 e k_2 sia indipendente da x , e che l'errore di stima abbia media nulla – ovvero che la stima non sia “polarizzata” (“*biased*”), quindi che

$$E[\tilde{x}] = E[k_1(x + v_1) + k_2(x + v_2) - x] = 0.$$

Poiché $E[v_1] = E[v_2] = 0$ e $E[x] = x$ (x non è aleatorio, anche se incognito), si ottiene

$$k_2 = 1 - k_1$$

Dalle equazioni precedenti, ponendo σ_1^2 e σ_2^2 le varianze degli errori di misura v_1 e v_2 , si ottiene lo scarto quadratico medio dell'errore

$$E[\tilde{x}^2] = k_1^2 \sigma_1^2 + (1 - k_1)^2 \sigma_2^2$$

Se deriviamo questa espressione rispetto a k_1 ed eguagliamo il risultato a zero, si ottiene

$$2k_1 \sigma_1^2 - 2(1 - k_1) \sigma_2^2 = 0$$

ovvero

$$k_1 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

Il minimo del valore quadratico medio dell'errore corrispondente vale

$$E[\tilde{x}^2] = \left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} \right)^{-1}.$$

Come si può osservare, questo valore è minore di entrambe i valori quadratici medi degli errori.

L'algoritmo risultante è dunque

$$\hat{x} = \left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right) z_1 + \left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right) z_2$$

Nel caso limite in cui le due misure abbiano la stessa accuratezza, cioè $\sigma_1 = \sigma_2$, la stima ottima non è altro che la media delle due misure. Se invece una delle due misure fosse perfetta (ad esempio, $\sigma_1 = 0$), l'altra misura è scartata.

2.3.2 Stime LS e ML

Si consideri adesso il caso un poco più generale in cui sia $z \in \mathbb{R}^m$ un vettore di misure, $x \in \mathbb{R}^n$ la incognita, $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$ la matrice del modello (statico, lineare) di generazione delle misure, e $v \in \mathbb{R}^m$ il vettore degli errori di misura. Si ha dunque

$$z = Hx + v$$

Perchè il problema sia determinato, è necessario che sia $m \geq n$, ciò che supporremo.

Ricordiamo che la soluzione ai minimi quadrati pesati, cioè la stima \hat{x}_{ls} che minimizza il costo

$$J = (z - Hx)^T R^{-1} (z - Hx),$$

dove R è una matrice s.p.d. di pesi assegnati alle varie misure (ad esempio diagonale con valori inversamente proporzionali alla loro affidabilità) è data da

$$\hat{x}_{ls} = (H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1} z.$$

In presenza di una caratterizzazione statistica degli errori di misura z , si può ottenere una soluzione di *massima verosimiglianza* (stima ML, “maximum likelihood”), intesa nel senso di trovare la \hat{x} che massimizza la probabilità che la misura che si otterrebbe da \hat{x} fosse uguale alla misura effettivamente ottenuta.

Se $v \sim N(0, R)$, ad esempio, si ha

$$p(z|x) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} \|R\|^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} (z - Hx)^T R^{-1} (z - Hx) \right]$$

Per massimizzare $p(z|x)$ rispetto a x , si può equivalentemente massimizzare $\log(p(z|x))$, quindi massimizzare l'esponente. Si ottiene allora di nuovo

$$\hat{x}_{ml} = (H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1} z = H^\dagger z,$$

dove \bar{H}^\dagger indica la pseudoinversa di \bar{H} pesata in \bar{R}^{-1} . Da questa equazione è evidente come la soluzione ai minimi quadrati coincida con quella di massima verosimiglianza, se i pesi della prima sono presi pari alla matrice di covarianza degli errori di misura.

2.3.3 Conoscenze a priori: stime MAP e MV

Si noti che anche nella stima a massima verosimiglianza, nulla è detto sulle statistiche di x . In particolare, è frequente il caso in cui già prima della misura (cioè “a priori”), sia nota una stima della incognita e della sua densità, che indicheremo con $p_{prior}(x)$. È importante in questo caso saper trovare una nuova stima che aggiorni la distribuzione con i nuovi dati ottenuti dalla misura, pesando opportunamente le due fonti di informazione.

Questo è possibile fare mediante i metodi di stima *bayesiani*, ovvero basati sul teorema di Bayes:

$$p(x|z) = \frac{p(z|x)p(x)}{p(z)}.$$

Il teorema può essere letto nel seguente modo: la densità di probabilità per x dopo (*a posteriori*) di una misura z , è pari al prodotto della densità *a priori* su x , $p(x)$, e la densità di probabilità condizionata $p(z|x)$ di ottenere dal modello la misura z dato un valore x , diviso per la densità di probabilità del valore di misura z .

Si noti che, se è possibile procedere al calcolo di $p(x|z)$, sappiamo tutto quanto possiamo desiderare sul processo. Da questa funzione è possibile ottenere la stima \hat{x} secondo criteri diversi.

Ad esempio, se interessa massimizzare la probabilità che $x = \hat{x}$, sceglieremo \hat{x} corrispondente al massimo della densità a posteriori $p(x|z)$ (questa stima è detta MAP, *maximum a posteriori*). Se la densità a priori è uniforme, se cioè non si hanno informazioni prima delle misure, questa stima coincide con la stima a massima verosimiglianza.

Se invece vogliamo minimizzare la varianza della stima a posteriori (stima MV), dovremo minimizzare un costo del tipo

$$J = \int (\hat{x} - x)^T S (\hat{x} - x) p(x|z) dx,$$

con S matrice s.p.d.. Imponendo $\frac{\partial J}{\partial x} = 0$ si trova facilmente

$$\hat{x} = \int x p(x|z) dx = E[x|z],$$

quindi, indipendentemente da S , la stima a minima varianza è la media della distribuzione a posteriori.

La differenza tra una stima MAP e MV è evidente se si pensa ad una distribuzione $p(x|z)$ non gaussiana, ad esempio multimodale (cioè con due o più picchi): in questo caso, la stima MAP corrisponderebbe al valore di x in cui si ha il massimo picco di $p(x|z)$, mentre la x di minima varianza è quella baricentrale.

Se la distribuzione per il rumore v e quella a priori per x sono normali, rispettivamente a media nulla e covarianza $(0, R)$ e (x_0, P_0) , ed essendo il modello della misura $z = Hx + v$ lineare, si ottiene facilmente dalla formula di Bayes che anche $p(x|z)$ è normale, a media

$$\hat{x} = E[x|z] = (P_0^{-1} + H^T R^{-1} H)^{-1} (H^T R^{-1} z + P_0^{-1} x_0)$$

e covarianza

$$P_{post} = (H^T R^{-1} H + P_0^{-1})^{-1}.$$

In questo caso, la stima MAP e MV coincidono. È anche evidente da questa formula che la covarianza a posteriori è sempre non superiore a quella a priori, nel senso che $(P_0 - P_{post})$ è per lo meno semidefinita positiva. L'atto di misura quindi diminuisce (o almeno non aumenta) *in media* l'incertezza della variabile misurata.

Dalla $P_{post}^{-1} \hat{x} = H^T R^{-1} z + P_0^{-1} x_0$, sommando e sottraendo a destra $H^T R^{-1} H x_0$, con semplici manipolazioni si può riscrivere

$$\hat{x} = x_0 + P_{post} H^T R^{-1} (z - H x_0),$$

da cui si vede come si aggiorna la stima sulla base della *innovazione*, cioè della differenza $z - H x_0$ tra quanto effettivamente misurato e quanto ci si sarebbe attesi sulla base della stima precedente.

2.3.4 Aggiornamento ricorsivo delle stime

Si pensi di aver raccolto misure sino all'istante k -esimo, avendo quindi assemblato una equazione del tipo

$$\bar{z}_k = \bar{H}_k x + \bar{v}$$

con $\bar{z}_k, \bar{v} \in \mathbb{R}^{mk}$, $\bar{H}_k \in \mathbb{R}^{mk \times n}$, $\bar{v} \simeq N(0, \bar{R})$ e $\bar{R} \in \mathbb{R}^{mk \times mk}$.

Supponiamo che sia disponibile una stima a massima verosimiglianza $\hat{x}_{ml} = \bar{H}^\dagger \bar{z}$. All'arrivo di una nuova serie di misure $z_{k+1} = H_{k+1}x + v_{k+1} \in \mathbb{R}^m$, per ottenere una nuova stima analoga, si potrebbe procedere a costruire una nuova equazione

$$\begin{bmatrix} \bar{z}_k \\ z_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{H}_k \\ H_{k+1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \bar{v} \\ v_{k+1} \end{bmatrix}$$

e a risolverla, pseudoinvertendo una nuova matrice di dimensione $(k+1)m \times n$. È ovvio che il peso computazionale cresce velocemente al crescere del numero delle misure effettuate.

L'algoritmo di stima MV è invece molto adatto ad una implementazione ricorsiva, nella quale una stima $\hat{x}_k \in \mathbb{R}^n$ viene aggiornata in \hat{x}_{k+1} all'arrivo di una nuova serie di misure $z_k \in \mathbb{R}^m$, senza dover più tenere esplicitamente in conto le precedenti misure.

È sufficiente infatti considerare l'algoritmo nella forma dell'innovazione vista poc'anzi. Se al passo k -esimo è disponibile, oltre alla stima \hat{x}_k , anche la covarianza P_k della stessa, si può aggiornare la stima e la covarianza semplicemente utilizzando le

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= (H_k^T R_k^{-1} H_k + P_k^{-1})^{-1}, \\ \hat{x}_{k+1} &= \hat{x}_k + P_{k+1} H_k^T R_k^{-1} (z_k - H_k \hat{x}_k), \end{aligned}$$

quindi con un algoritmo di complessità minore (si invertono matrici di ordine $n \times n$) e costante al procedere delle misure.

È ovvio che in questo schema è fondamentale poter tenere in conto della distribuzione di probabilità di \tilde{x}_k , che è un *a priori* rispetto alla stima di \tilde{x}_{k+1} . È anche evidente che lo schema ricorsivo visto è equivalente alla soluzione completa, se e solo se *tutte le informazioni sulle statistiche della stima sono contenute nella sua media e matrice di covarianza*, quindi in particolare se la stima è una variabile gaussiana.

È ancora utile osservare che, posto al solito $\tilde{x} = \hat{x} - x$, si ha per la stima MV $E[\tilde{x}\hat{x}] = 0$, il che significa che la stima e l'errore di stima non sono correlati. Per processi gaussiani, questo significa la completa indipendenza

delle variabili. Questo a sua volta indica che la stima così fatta può essere considerata ottima, nel senso che sfrutta tutta la informazione contenuta nelle misure z , né si può ottenere alcun miglioramento in media in \tilde{x} dalla conoscenza di z o x_0 .

2.4 Sistemi Dinamici Lineari

Consideriamo adesso sistemi lineari (non necessariamente LTI in questa fase), soggetti a rumore. Consideriamo innanzitutto sistemi a tempo discreto:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= A_k x_k + B_k w_k \\ y_k &= C_k x_k + v_k\end{aligned}$$

dove appaiono il *rumore di processo* w ed il *rumore di misura*, v . Si noti che, senza perdita di generalità, si suppone nullo l'ingresso di controllo al sistema (il quale, essendo noto, non ha influenza diretta sulle stime dello stato).

Supporremo che le *successioni* w_k e v_k siano processi aleatori discreti scorrelati temporalmente (rumore bianco) con distribuzione normale $w \sim N(0, Q_k)$, $v \sim N(0, R_k)$. Avremo quindi, per il termine forzante

$$E[B_k w_k w_\ell^T B_\ell^T] = \begin{cases} B_k Q_k B_k^T, & k = \ell \\ 0 & k \neq \ell \end{cases}$$

Nel caso di sistemi tempo-continuo, si consideri

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)w(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + v(t)\end{aligned}$$

dove il rumore di processo $w(t)$ ed il rumore di misura $v(t)$ sono processi stocastici continui, che assumiamo essere distribuiti in modo normale e bianchi: $w \sim N(0, Q(t))$, $v \sim N(0, R(t))$. Per il termine forzante $B(t)w(t)$, la autocorrelazione vale quindi

$$E[B(t)w(t)w^T(\tau)B^T(\tau)] = B(t)Q(t)B^T(t)\delta(t - \tau)$$

Come conseguenza, anche lo stato è un processo stocastico. Definiamo ancora l'errore di stima

$$\tilde{x} = \hat{x} - x \in \mathbb{R}^n,$$

e indichiamo la covarianza di questa variabile con $P = E[\tilde{x}\tilde{x}^T]$.

2.4.1 Propagazione degli errori in assenza di misure

Supponiamo di conoscere lo stato di un sistema dinamico lineare discreto ad un istante t_k a meno di un errore a media nulla e covarianza

$$P_k = E[\tilde{x}_k \tilde{x}_k^T],$$

e di voler trovare una stima del valore dello stato al tempo t_{k+1} .

Basandoci sul modello noto del sistema, costruiamo la legge di aggiornamento della stima

$$\hat{x}_{k+1} = A_k \hat{x}_k.$$

È facile verificare che la stima rimane non polarizzata, se anche il rumore di processo non lo è. Infatti per la dinamica dell'errore vale

$$\tilde{x}_{k+1} = A_k \tilde{x}_k - B_k w_k,$$

e si ha

$$E[\tilde{x}_{k+1}] = A_k E[\tilde{x}_k] - B_k E[w_k] = 0.$$

Possiamo anche facilmente *proiettare* in avanti la matrice di covarianza della stima:

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= E[\tilde{x}_{k+1} \tilde{x}_{k+1}^T] = E[(A_k \tilde{x}_k - B_k w_k)(A_k \tilde{x}_k - B_k w_k)^T] \\ &= E[A_k \tilde{x}_k \tilde{x}_k^T A_k^T - A_k \tilde{x}_k w_k^T B_k^T - B_k w_k \tilde{x}_k^T A_k^T + B_k^T w_k w_k^T B_k] \\ &= A_k P_k A_k^T + B_k Q_k B_k^T \end{aligned}$$

dove si è usato il fatto che non c'è correlazione tra l'errore di stima e il rumore di processo al passo k . Questa è una conseguenza del fatto che il rumore di processo è supposto essere bianco: quindi \tilde{x}_k , anche se chiaramente correlato a w_{k-1}, w_{k-2}, \dots attraverso x_k , è scorrelato da w_k .

Da questa relazione si può osservare che la covarianza del termine forzante si somma a quella della stima ad ogni passo. Inoltre, la covarianza della stima tende a crescere anche in assenza di rumore di processo se la matrice A_k è instabile (se ha autovalori esterni al cerchio unitario).

Con argomenti simili si può ottenere una analoga legge di evoluzione della stima in tempo continuo

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t) \hat{x}(t)$$

e della sua covarianza

$$\dot{P}(t) = A(t)P(t) + P(t)A^T(t) + B(t)Q(t)B^T(t).$$

2.4.2 Aggiornamento delle stime basato sulle misure

Quando sia disponibile una misura, è possibile aggiornare la stima dello stato sino ad allora disponibile fondendo le informazioni relative in una stima a posteriori, secondo quanto visto poco sopra. Supponiamo quindi di avere, al k -esimo istante ma *prima* di considerare la misura y_k , una stima $\hat{x}_{(k|k-1)}$ con covarianza $P_{(k|k-1)}$, e di misurare $y_k = C_k x_k + v_k$, sapendo che $v \sim N(0, R_k)$. In base a quanto detto, la stima a minima varianza è data da

$$\hat{x}_{(k|k)} = \hat{x}_{(k|k-1)} + P_{(k|k)} C_k^T R_k^{-1} (y_k - C_k \hat{x}_{(k|k-1)})$$

dove appare l'espressione della varianza a posteriori della misura definita da

$$P_{(k|k)} = \left(C_k^T R_k^{-1} C_k + P_{(k|k-1)}^{-1} \right)^{-1}.$$

2.5 Filtro di Kalman

Sulla base di quanto sinora osservato, possiamo stabilire la struttura di un *filtro*, cioè di una implementazione ricorsiva degli algoritmi di stima, che si applichi al problema della ricostruzione dello stato di un sistema lineare.

Per il sistema t.d.

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_k x_k + B_k w_k \\ y_k &= C_k x_k + v_k \end{aligned}$$

con $w \sim N(0, Q_k)$, $v \sim N(0, R_k)$, sia $x_0 \sim (\hat{x}_0, P_0)$.

Sia \hat{x}_k la stima k -esima dello stato x_k , e sia questa stima gaussiana a error medio nullo ($E[\tilde{x}_k] = 0$) con covarianza $E[\tilde{x}_k \tilde{x}_k^T] = P_k$.

Desiderando costruire una stima \hat{x}_{k+1} , dovremo tenere conto di due sorgenti di informazione, la conoscenza del modello (mediante l'utilizzo della legge di propagazione dello stato) e la conoscenza delle misure. Distinguiamo quindi due diverse stime di x_k , una prima $\hat{x}_{(k|k-1)}$ costruita conoscendo le misure sino y_{k-1} , ed una seconda $\hat{x}_{(k|k)}$, che utilizza anche la misura y_k .

Basandoci sui risultati della sezione precedente, costruiamo quindi le stime

$$\begin{aligned} \hat{x}_{(k+1|k)} &= A_k \hat{x}_{(k|k)} \\ P_{(k+1|k)} &= A_k P_{(k|k)} A_k^T + B_k Q_k B_k^T \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} P_{(k+1|k+1)}^{-1} &= P_{(k+1|k)}^{-1} + C_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} C_{k+1} \\ \hat{x}_{(k+1|k+1)} &= \hat{x}_{(k+1|k)} + P_{(k+1|k+1)} C_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} (y_{k+1} - C_{k+1} \hat{x}_{(k+1|k)}) \end{aligned}$$

L'algoritmo così descritto prende il nome di *filtro di Kalman* discreto. Il *guadagno della innovazione* nel filtro, $M_k \stackrel{def}{=} P_{(k|k)} C_k^T R_k^{-1}$ è fondamentale un rapporto tra la incertezza nella stima dello stato P e la incertezza nella misura R : conseguentemente, se le misure sono molto accurate (R piccola), la nuova stima \hat{x}_{k+1} sarà poco legata alla precedente. Se viceversa sono disponibili misure poco affidabili ma vecchie stime relativamente buone, si propagheranno queste nel futuro appoggiandosi sostanzialmente al modello del sistema.

Assumendo per semplicità un sistema tempo invariante (nel quale sia le matrici del modello A_k, B_k, C_k sia le covarianze del rumore R_k, Q_k sono costanti), e ponendo $\hat{x}_k \stackrel{def}{=} \hat{x}_{(k|k-1)}$ e $P_k \stackrel{def}{=} P_{(k|k)}$, le equazioni del filtro possono essere riscritte nella forma compatta

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1} &= A\hat{x}_k + L_k(y_k - C\hat{x}_k) \\ \hat{y}_k &= C\hat{x}_k + CM_k(y_k - C\hat{x}_k),\end{aligned}$$

con $L_k = AM_k = AP_k C^T R^{-1}$, e

$$P_{k+1}^{-1} = (AP_k A^T + BQB^T)^{-1} + C^T R^{-1} C.$$

La variabile \hat{y}_k è la versione filtrata della uscita (che può essere utile quando piuttosto che alla stima dello stato, si sia interessati a sopprimere gli effetti dei disturbi dalle uscite misurate).

Da questa espressione è evidente come questo filtro, che prende il nome di *filtro di Kalman*, non sia altro che uno stimatore di Luenberger, la cui matrice di iniezione delle misure sullo stato (detta anche *di guadagno*) è tempo-variante e scelta in modo da ottimizzare la stima.

Anche per sistemi e processi stazionari, il guadagno ottimo L_k del filtro di Kalman è tempo variante. È comunque possibile che esso tenda asintoticamente ad un valore costante, che si può ottenere imponendo $P_{k+1} = P_k$ nelle precedenti equazioni. In questo caso, la informazione che ad ogni passo *si perde* a causa dell'intervento del rumore di processo, BQB^T , è esattamente bilanciata dalla somma di quella che viene acquisita con le misure, $C^T R^{-1} C$, con quanto di convergenza o divergenza dello stato (e delle stime) messo in gioco dal comportamento del sistema stesso (attraverso la sua matrice dinamica A).

In queste ipotesi, il filtro di Kalman a regime (o *steady-state*) assume la semplice forma

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + L(y_k - C\hat{x}_k)$$

con $L = A\bar{P}C^T R^{-1}$, dove \bar{P} è la soluzione della equazione algebrica di Riccati associata, che si trova numericamente con facilità (si veda il comando Matlab

kalman). È evidente che il filtro di Kalman steady-state consiste in una scelta ottima, date le covarianze del rumore e la dinamica del sistema, della matrice di guadagno di un osservatore alla Luenberger.

Due interessanti casi limite:

- 1) La legge dei grandi numeri. Si applichino le relazioni sopra viste al semplice sistema monodimensionale

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k \\y_k &= x_k + v_k\end{aligned}$$

in cui cioè si cerca di stimare una variabile costante (in cui quindi il rumore di processo è assente, $Q = 0$) mediante misure ripetute e rumorose con covarianza R . Si ottiene facilmente per la stima al passo k :

$$\begin{aligned}\hat{x}_k &= \frac{1}{1+k(P_0/r)} \left[\hat{x}_0 + \frac{P_0}{r} \sum_{j=1}^k y_j \right] \\P_k &= \frac{P_0}{1+k(P_0/R)}\end{aligned}$$

Per un gran numero di misure ($k \rightarrow \infty$), si ha

$$\begin{aligned}\hat{x}_k &\rightarrow \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k y_j = \bar{y} \\P_k &\rightarrow 0, \quad \text{as } k \rightarrow \infty\end{aligned}$$

ovvero la stima ottima tende al valore medio con covarianza nulla, indipendentemente da qualsiasi a priori.

- 2) Per lo stesso sistema, soggetto però adesso a rumore di processo molto elevato ($Q \rightarrow \infty$), in modo che la incognita x vari imprevedibilmente da passo a passo, si ottiene invece che ad ogni passo la miglior stima non è altro che la misura più recente:

$$\begin{aligned}\hat{x}_k &\rightarrow y_k \\P_k &\rightarrow R, \quad \text{as } Q \rightarrow \infty\end{aligned}$$

2.5.1 Filtro di Kalman in Tempo Continuo e Dualità

I risultati ottenuti in tempo discreto possono essere ottenuti in modo analogo, anche se con qualche maggiore difficoltà analitica, in tempo continuo.

Sia dunque dato il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)w(t) \\y(t) &= C(t)x(t) + v(t)\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} E[w] &= 0, & E[w(t)w^T(\tau)] &= Q(t)\delta(t - \tau), \\ E[v] &= 0, & E[v(t)v^T(\tau)] &= R(t)\delta(t - \tau), \end{aligned}$$

e stima a priori

$$E[x(0)] = x_0, \quad E[x(0)x^T(0)] = P_0.$$

Il filtro di Kalman in questo caso si scrive (omettendo la dipendenza temporale delle variabili per semplicità di notazione)

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + PC^TR^{-1}(y - C\hat{x}) \\ \dot{P} &= AP + PA^T + BQB^T - PC^TR^{-1}CP \end{aligned}$$

con $\hat{x}(0) = x_0$ e $P(0) = P_0$.

La equazione che determina la evoluzione della covarianza della stima ha la struttura di una equazione differenziale di Riccati. Per sistemi e processi stazionari, la covarianza della stima può raggiungere un valore costante, che corrisponde ad una soluzione della corrispondente equazione algebrica di Riccati,

$$AP + PA^T + BQB^T - PC^TR^{-1}CP = 0.$$

Anche in questo caso, detta \bar{P} la soluzione di regime della ARE, si ottiene che un filtro di Kalman a regime non è altro che uno stimatore di Luenberger, la cui matrice di iniezione delle misure sullo stato $L = \bar{P}C^TR^{-1}$, è scelta in modo da ottimizzare la stima (minimizzare $\lim_{t \rightarrow \infty} E[\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t)]$)

Vi è infatti una perfetta *dualità* tra il problema del controllo ottimo precedentemente considerato, e quello della stima ottima. Più precisamente, si consideri il sistema lineare

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_c x + B_c u \\ y &= C_c x \end{aligned}$$

con l'indice di costo sul controllo

$$J = \frac{1}{2}x(T)^T P_c(T)x(T) + \int_0^T \frac{1}{2} \left(y(t)^T Q_c y(t) + u(t)^T R_c u(t) \right) dt,$$

e si consideri un secondo sistema lineare

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_s x + B_s w \\ y &= C_s x + v \end{aligned}$$

con $w \sim (0, Q_s)$, $v \sim (0, R_s)$, $x(0) \sim (0, P_s(0))$.

La equazione differenziale di Riccati per il controllo LQR del primo sistema (che ricordiamo è dato da $\hat{u} = -R_c^{-1}B_c^T P_c(t)x$), ovvero

$$-\dot{P}_c = A_c^T P_c + P_c A_c + Q_c - P_c B_c R_c^{-1} B_c^T P_c$$

coincide esattamente con quella del filtro di Kalman per il secondo sistema

$$\dot{P}_s = A_s P_s + P_s A_s^T + B_s Q_s B_s^T - P_s C_s^T R_s^{-1} C_s P_s$$

laddove valga

Controllo Ottimo	Stima Ottima	Dualità
A_c	A_s	$A_s = A_c^T$
B_c	B_s	$B_s = C_c^T$
C_c	C_s	$C_s = B_c^T$
Q_c	Q_s	$Q_s = Q_c$
R_c	R_s	$R_s = R_c$
$P_c(T)$	$P_s(0)$	$P_s(0) = P_c(T)$
t	τ	$\tau = T - t$

L'ultima riga ha il significato di cambiare il senso di scorrimento del tempo (cioè, si pone $T - t$ al posto di $t - 0$), come indicato dalla differenza di segno tra le due equazioni di Riccati.

La ottimalità della stima con un filtro di Kalman, e la dualità tra il problema di controllo ottimo LQR e la stima ottima con rumore gaussiano, è meglio comprensibile se si considera il seguente problema:

Problema di smoothing di dati di misura. Nel'ambito del problema di stima per sistemi LTI TC con rumore gaussiano come sopra visto, si consideri il caso in cui la stima di $x(t)$ possa essere fatta *dopo* aver raccolto tutte le misure $y(\tau)$ per $t_0 \leq \tau \leq T$.

Ovviamente, questa stima sarà non peggiore di quella prima ottenuta. Il problema può essere posto formalmente come segue: Si determinino $x(t_0)$ e $w(t)$ che minimizzano il funzionale di costo

$$\begin{aligned} J = & \frac{1}{2} \left[(\hat{x}(t_0) - \hat{x}(t_0))^T P^{-1}(t_0) [(\hat{x}(t_0) - \hat{x}(t_0))] \right. \\ & + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left[(w(t) - \bar{w}(t))^T Q^{-1}(t) (w(t) - \bar{w}(t)) \right] dt \\ & \left. + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left[(y(t) - C(t)x(t))^T R^{-1}(t) (y(t) - C(t)x(t)) \right] dt \right. \end{aligned}$$

soggetta al vincolo

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)w.$$

Questo è un problema di ottimizzazione deterministica (le incognite sono deterministiche), cui si possono applicare le regole viste per il controllo ottimo. Costruendo l'Hamiltoniano corrispondente, postulando una soluzione lineare $x(t) = \hat{x}(t) - P(t)\lambda(t)$ e imponendo le condizioni di estremizzazione, si ottiene come soluzione

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + B\bar{w} + PC^TR^{-1}(y - C\hat{x}) & \hat{x}(t_0) &= \hat{x}_0 \\ \dot{P} &= AP + PA^T + BQB^T - PC^TR^{-1}CP & P(t_0) &= P_0\end{aligned}$$

con

$$\dot{\lambda} = -(A - PC^TR^{-1}C)^T\lambda + C^TR^{-1}(y - C\hat{x}), \quad \lambda(t_f) = 0.$$

La situazione è esattamente speculare a quella vista nel controllo ottimo, quindi, con la matrice P che scorre avanti nel tempo (assieme allo stato) mentre λ scorre all'indietro.

2.5.2 Altre considerazioni

Il filtro di Kalman fornisce una stima ottima nel senso prima specificato che $E[\tilde{x}\tilde{x}^T] = 0$ (si dice che la stima è BLUE, da *Best Linear Unbiased Estimation*), nelle ipotesi di linearità del sistema e di processi di rumore gaussiani (bianchi a distribuzione normale).

Nella pratica, vi possono molte discrepanza da tale quadro. Alcune di queste portano a semplici generalizzazioni dei risultati del filtro. Ad esempio, i casi in cui: il rumore di processo ha un andamento medio non nullo (si pensi ad esempio ad un ingresso di controllo, quindi intenzionalmente diverso da zero, cui si somma un rumore di attuazione), cioè $w \sim (\bar{w}(t), Q(t))$; ovvero vi è un termine di accoppiamento diretto tra ingresso e uscita (matrice $D \neq 0$); o ancora vi è una correlazione tra il rumore di processo e quello di misura, $E[(w(t) - \bar{w}(t))v^T(\tau)] = N(t)\delta(t - \tau)$, sono tutti trattabili con relativa facilità.

Altre estensioni a casi praticamente importanti possono essere fatte invece solo su base empirica. In particolare, per sistemi nonlineari, è pratica diffusa applicare il cosiddetto *Filtro di Kalman Esteso* (EKF), basato sulla applicazione del filtro standard al linearizzato del modello, *ricalcolata ad ogni passo* nello stato stimato corrente. Anche se in certi casi questo porta a risultati accettabili, è ovvio che non solo le proprietà di ottimalità del filtro, ma addirittura quelle di convergenza delle stime sono perse in generale.

Il comando KALMAN di Matlab fornisce un filtro che gestisce anche questi casi:

$$[\text{KEST}, \text{L}, \text{P}] = \text{KALMAN}(\text{SYS}, \text{QN}, \text{RN}, \text{NN})$$

designs a Kalman estimator KEST for the continuous- or discrete-time plant with state-space model SYS. For a continuous-time model

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Gw && \text{State equation} \\ y &= Cx + Du + Hw + v && \text{Measurements} \end{aligned}$$

with known inputs u , process noise w , measurement noise v , and noise covariances $E[ww'] = QN$, $E[vv'] = RN$, $E[ww'] = NN$, the estimator KEST has input $[u; y]$ and generates the optimal estimates y_e, x_e of y, x by:

$$\begin{aligned} \dot{x}_e &= Ax_e + Bu + L(y - Cx_e - Du) \\ \begin{bmatrix} y_e \\ x_e \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C \\ I \end{bmatrix} x_e + \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix} u \end{aligned}$$

By default, SYS is the state-space model $SS(A, [BG], C, [DH])$ and $NN = 0$ when omitted. The row size of QN specifies the number of noise inputs w (last inputs to SYS). The Kalman estimator KEST is continuous when SYS is continuous, discrete otherwise.

KALMAN also returns the estimator gain L and the steady-state error covariance P . In continuous time with $H = 0$, P solves the Riccati equation

$$AP + PA^T - (PC^T + GN)R^{-1}(CP + N^T G^T) + GQG^T = 0.$$

$$[\text{KEST}, L, P, M, Z] = \text{KALMAN}(\text{SYS}, \text{QN}, \text{RN}, \text{NN})$$

produces a discrete Kalman estimator KEST when the LTI plant SYS is discrete. Given the plant

$$\begin{aligned} x[n+1] &= Ax[n] + Bu[n] + Gw[n] && \text{State equation} \\ y[n] &= Cx[n] + Du[n] + Hw[n] + v[n] && \text{Measurements} \end{aligned}$$

with known inputs u , process noise w , measurement noise v , and noise covariances $E[ww'] = QN$, $E[vv'] = RN$, $E[ww'] = NN$, the resulting Kalman estimator

$$\begin{aligned} x[n+1|n] &= Ax[n|n-1] + Bu[n] + L(y[n] - Cx[n|n-1] - Du[n]) \\ y[n|n] &= Cx[n|n] + Du[n] \\ x[n|n] &= x[n|n-1] + M(y[n] - Cx[n|n-1] - Du[n]) \end{aligned}$$

generates optimal output and state estimates $y[n|n]$ and $x[n|n]$ using $u[n]$ and $y[n]$ as inputs (in this order). The estimator state $x[n|n-1]$ is the best estimate of $x[n]$ given the past measurements $y[n-1], y[n-2], \dots$

Also returned are the estimator and innovation gains L and M , and the steady-state error covariances

$$\begin{aligned} P &= E[(x - x[n|n-1])(x - x[n|n-1])'] && \text{Riccati solution} \\ Z &= E[(x - x[n|n])(x - x[n|n])'] && \text{Updated estimate} \end{aligned}$$

2.6 Controllo LQG

Sulla base dei risultati della sintesi ottima del controllore LQR e del filtro di Kalman, possiamo chiederci adesso se e come è possibile connettere i due risultati per controllare in modo ottimo un sistema soggetto a rumore e con misure solo parziali dello stato.

In altri termini, ci chiediamo che significato e che proprietà abbia l'uso la stima ottima \hat{x} di un filtro di Kalman *al posto* del valore dello stato nella legge di retroazione LQR. Anche assumendo che le caratteristiche di ottimalità dei due algoritmi siano in qualche modo conservate, a quale criterio di ottimalità esse potrebbero rispondere?

Un risultato estremamente forte in questo senso è rappresentato dal cosiddetto *Teorema di Separazione* (detto anche *Principio di Equivalenza alla Certezza* nella letteratura econometrica).

Problema di controllo ottimo stocastico Lineare Quadratico Gaussiano (LQG)

Dato un sistema (anche tempo-variante, pur omettendo la dipendenza esplicita)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + w \\ y &= Cx + v \end{aligned}$$

dove $x(t_0)$ è una variabile aleatoria a distribuzione normale con media nulla $E[x(t_0)] = 0$ e covarianza $E[x(t_0)x(t_0)^T] = P_0$; w e v sono processi gaussiani (indipendenti da $x(t_0)$) con $E[w] = E[v] = 0$ e

$$E \left\{ \begin{bmatrix} w(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t') \\ v(t') \end{bmatrix}^T \right\} = \begin{bmatrix} Q_s & N_s \\ N_s^T & R_s \end{bmatrix} \delta(t - t')$$

e data la conoscenza delle misure $y(\tau), \forall \tau \in [t_0, T]$:

si trovi un controllo $u(t)$ come funzionale di $z(\tau)$, che minimizzi

$$J = E \left\{ \frac{1}{2} x^T(t_f) S_f x(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} x^T & u^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_c & N_c \\ N_c^T & R_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} dt \right\}.$$

La soluzione (detta controllo LQG) di questo problema è data da una retroazione

$$u = -K\hat{x}$$

dello stato stimato mediante la legge

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + G(y - C\hat{x})$$

dove

$$\begin{aligned} K &= R_c^{-1}(B^T S + N_c^T) \\ G &= (PC^T + N_s)R_s^{-1} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \dot{S} &= -SA - A^T S + K^T R_c K - Q_c \\ \dot{P} &= AP + PA^T - GR_s G^T + Q_s \end{aligned}$$