Stima della Regione di Asintotica Stabilità tramite Ottimizzazione Sum-of-Squares

January 31, 2024

La corretta stima della Regione di Asintotica Stabilità (RAS) per un sistema dinamico non lineare riveste un ruolo chiave nell'analisi del sistema e nella progettazione del controllo. La teoria della stabilità di Lyapunov costituisce la base del metodo basato sulla funzione di Lyapunov. Nonostante il processo di creazione di questa funzione sia stato ampiamente studiato, può rappresentare una sfida e potrebbe non essere applicabile a tutti i casi.

Per i sistemi con due o tre stati, la RAS può essere visualizzata simulando il sistema da molte condizioni iniziali e tracciando le traiettorie in un grafico del piano di fase. In alternativa, è possibile usare metodi basati sul campionamento come quelli visti in precedenza. Tuttavia, per sistemi di dimensioni superiori, è preferibile adottare un approccio analitico.

Un approccio di questo tipo è la tecnica di ottimizzazione sum-of-squares (SOS), che può stimare contemporaneamente la RAS e costruire una funzione di Lyapunov per i sistemi dinamici polinomiali.

1 Richiami Sum-of-squares

Un polinomio SOS è un polinomio non negativo, che può essere espresso come somma di quadrati di altri polinomi. Più formalmente:

Definizione 1 *Un polinomio p è SOS se esistono polinomi $g_1, \ldots, g_N$ tali per cui*

$$p = \sum_{i=1}^{N} g_i^2.$$

L'inseme dei polinomi SOS nella variabile vettoriale x è indicato con $\Sigma[x]$

Una conseguenza, banale, della definizione di SOS è che tutti i polinomi SOS sono non negativi in tutto lo spazio.

Sono disponibili diversi software e toolbox (ad esempio il toolbox SOSTOOLS di Matlab) che permettono di valutare se un dato polinomio sia SOS, e quindi globalmente non negativo in tutto lo spazio.

Questa proprietà risulta molto utile nell'ambito dello studio e della caratterizzazione della regione di asintotica stabilità (RAS) di un sistema dinamico non lineare.

Si ricordi infatti, che la stabilità globale di un punto di equilibrio può essere garantita con una funzione di Lyapunov, che è globalmente non negativa e radialmente illimitata, insieme a una trasformazione lineare di quella funzione, ovvero la derivata lungo il flusso dell'equazione differenziale ordinaria, che è globalmente non positiva. Poiché le decomposizioni SOS garantiscono la non negatività globale, possono essere utilizzate per verificare queste condizioni.

2 Regione di Asintotica Stabilità

Si consideri il sistema dinamico non lineare, autonomo descritto dall'equazione differenziale:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \tag{1}$$

dove $x(t) \in \mathbb{R}^n$ è il vettore di stato, e la funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ descrive la dinamica del sistema.

Si assuma, senza perdita di generalità, che l'origine sia un punto di equilibrio del sistema, cioè $f(0) = 0$. Si indichi con $\phi(\xi, t)$ la soluzione al tempo t dell'equazione differenziale, con condizione iniziale $x(0) = \xi$. La regione di asintotica stabilità del sistema è definita come l'insieme:

$$\mathrm{RAS} = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \lim_{t\to\infty} \phi(\xi, t) = 0\}.$$

Rappresenta cioè l'insieme delle condizioni iniziali per cui le traiettorie ϕ del sistema convergono asintoticamente all'equilibrio.

Precedentmente, abbiamo visto come sia possibile calcolare una stima di questa regione, usando metodi basati sulla funzione di Lyapunov e basati sul campionamento.

Questi metodi, specialmente nel caso di sistemi con molti stati, sono computazionalmente inefficienti. Inoltre, poiché la funzione di Lyapunov utilizzata è ottenuta come soluzione dell'equazione di Lyapunov a partire dall'approsimazione lineare del sistema, la V scelta è vincolata ad avere una forma quadratica.

Come si è visto, questo può portare ad approssimazioni molto conservative della RAS, specialmente per sistemi con RAS non simmetriche, e richiede quindi la combinazione di un alto numero di funzioni V per ottenere approssimazioni più fedeli.

Per questo, è utile investigare l'uso di tecniche analitiche per la stima della RAS e per la scelta della funzione di Lyapunov.

Al fine di capire come sia possibile sfruttare le proprietà SOS a questo scopo, è necessario introdurre alcune definizioni.

Lemma 1 *Considerando $\gamma > 0$ e supponendo che esista una funzione continuamente differenziabile $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che:*

$$\Omega_{V,\gamma} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq \gamma\} \textit{ è limitato,} \tag{2}$$
$$V(0) = 0,\ V(x) > 0 \quad \textit{per tutti i vettori non nulli } x \in \mathbb{R}^n, \tag{3}$$
$$\Omega_{V,\gamma} \setminus \{0\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \nabla V(x) f(x) < 0\}. \tag{4}$$

Allora, per tutti i vettori $\xi \in \Omega_{V,\gamma}$, la soluzione $\phi(\xi, \dot{)}$ esiste nell'intervallo $[0, \infty)$, soddisfa $\phi(\xi, t) \in \Omega_{V,\gamma}$ per ogni $t > 0$, e $\lim_{t\to\infty} \phi(\xi, t) = 0$.

Il Lemma 1 mostra che $\Omega_{V,\gamma}$ è un sottoinsieme invariante della RAS per l'equilibrio $x = 0$.

Data una funzione definita positiva V e un γ, è necessario verificare la condizione

$$\Omega_{V,\gamma} \setminus \{0\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \nabla V(x) f(x) < 0\}. \tag{5}$$

Notare che entrambi gli insiemi sono definiti in base a disuguaglianze. Generalizzazioni della S-procedure possono essere utilizzate per verificare che $\Omega_{V,\gamma} \setminus \{0\}$ sia contenuto nell'insieme $\{x \in \mathbb{R}^n : \nabla V(x) f(x) < 0\}$.

Ad esempio, se esistono $l \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita positiva, ed $s \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ semidefinita positiva e:

$$-\left(l(x) + \nabla V(x) f(x)\right) + s(x)(V(x) - \gamma) \geq 0 \quad \forall x,$$

allora la condizione (5) è soddisfatta.

Per dimostrare questa affermazione, sia x un vettore non nullo che soddisfa $V(x) \leq \lambda$. Poiché $s(x) \geq 0$, segue che $\nabla V(x) f(x) \leq -l(x) < 0$.

Questa condizione (sufficiente) per verificare l'appartenenza, ci permette di poter definire una procedura iterativa che punti ad aumentare progressivamente il valore di γ in modo che $\Omega_{V,\gamma}$ sia un sottoinsieme invariante della RAS, mediante la scelta di una funzione s positiva semidefinita.

Questa procedura può essere vista formalmente come la soluzione del seguente problema di ottimizzazione:

$$\max_{\gamma, s} \gamma \tag{6}$$

soggetto a:

$$s(x) \geq 0\ \forall x \tag{7}$$

$$-\left(l(x) + \nabla V(x) f(x)\right) + s(x)(V(x) - \gamma) \geq 0 \quad \forall x \tag{8}$$

Qui, V e l sono funzioni date, mentre il valore scalare γ e la funzione s sono variabili decisionali. Per risolvere il problema, è necessario trovare una funzione s positiva semidefinita in modo che una specifica mappa affine, ovvero il lato sinistro dell'ineguaglianza in (8), sia globalmente non negativa.

Decomposizioni SOS e programmi SOS svolgono un ruolo cruciale in questo calcolo. A tale scopo, se le funzioni V, f, l e s sono polinomiali, le condizioni di

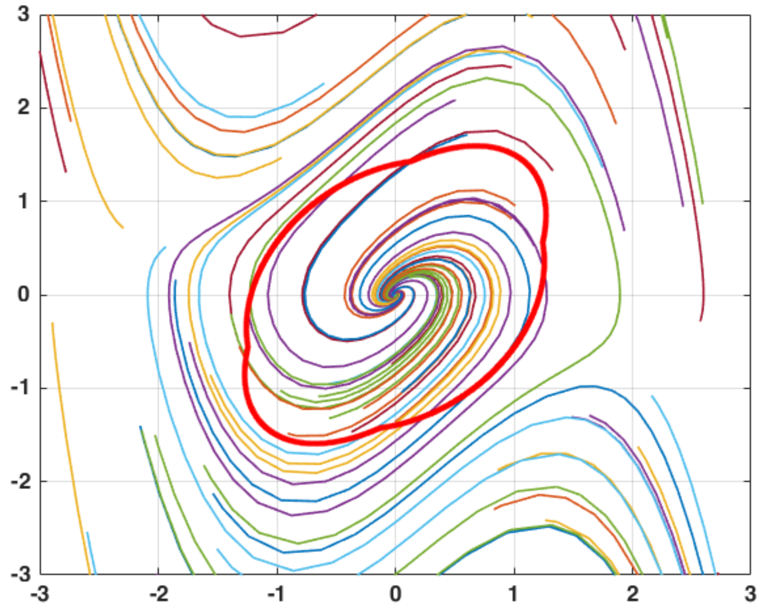

Figure 1: Stima della RAS per il reverse Van Der Pol, con 25 diverse funzioni di Lyapunov quadratiche.

non negatività polinomiale possono essere imposte con vincoli SOS più restrittivi, imponendo cioè che il lato sinistro delle due disequazioni siano polinomi di tipo SOS.

Con questo vincolo (più restrittivo) l'ottimizzazione (6)–(8) può essere riformulata nel seguente problema di ottimizzazione:

$$\max_{\gamma \in \mathbb{R}, s \in \mathcal{S}} \gamma \tag{9}$$

soggetto a:

$$s(x) \in \Sigma[x] \tag{10}$$

$$-\left(l(x) + \nabla V(x) f(x)\right) + s(x)(V(x) - \gamma) \in \Sigma[x] \tag{11}$$

Dove $\mathcal{S}$ rappresenta uno dato sottospazio di polinomi, ad esempio, tutti i polinomi quadratici o di grado quattro. Questa riformulazione consente di sfruttare tecniche SOS per risolvere il problema di ottimizzazione in modo più efficiente.

Si noti che se per parametrizzare lo spazio di ricerca per s vengono scelte un set di funzioni di base, ad esempio, tutte le funzioni quadratiche, l'ottimizzazione è quasi un programma SOS.

Questo programma presenta vincoli SOS e una funzione obiettivo che è una funzione lineare delle variabili decisionali. Tuttavia, il vincolo (11) coinvolge il termine $-s(x)\gamma$ e quindi è bilineare nelle variabili decisionali. Più precisamente, il problema è "quasi convesso", visto che fissato γ il vincolo (11) diventa convesso nelle altre variabili decisionali.

Per risolvere questo problema, l'ottimizzazione (9)–(11) può essere risolta utilizzando una bisezione su γ simile a quello visto in precedenza per il metodo a campionamento.

L'algoritmo per la stima della Regione di Asintotica Stabilità (RAS) è dato quindi dalla seguente procedura:

1. Sia $A = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=0}$ la linearizzazione della dinamica del sistema intorno al punto di equilibrio. Se A è di Hurwitz, allora, per ogni $Q \succeq 0$, esiste $P \succeq 0$ che soddisfa l'equazione di Lyapunov $A^T P + PA = -Q$.

2. La funzione $V(x) = x^T Px$ soddisfa la condizioni in (2) e i vincoli (3)-(4), per tutti i valori di $\gamma > 0$ sufficientemente piccoli.

3. Con questa V, massimizza γ utilizzando una procedura di bisezione soddisfacendo la condizione (11).

La massimizzazione di γ può essere fatta in maniera analoga alla procedura utilizzata per il metodo a campionamento. Definita V, e fissato un certo valore di $\gamma > 0$, è possibile verificare l'esistenza di un polinomio SOS $s(x)$ che verifica la disuguaglianza (11).

Utilizzando il toolboox SOSTOOLS di Matlab[1], è possibile quindi risolvere questo problema utilizzando questa funzione:

[1] `https://www.cds.caltech.edu/sostools/`

Data: Numero di stati N_s, matrice soluzione dell'equazione di Lyapunov P, curva di livello R, funzione dinamica ff
Result: Valutazione dell'Insieme di Livello mediante Ottimizzazione SOS

Funzione EvalSOS($N_s, P, R,$ ff):

Inizializzazione:
$x = \text{sym}("x", [N_s, 1]);$
$\text{ff}_{sym} = \text{ff}(x)$; `// Versione simbolica della dinamica`
$\text{proginit} = \text{sosprogram}(x)$; `// Inizializzazione del problema SOS`
$[\text{proginit}, \text{sig}] = \text{sospolyvar}(\text{proginit}, \text{monomials}(x, [0, 1, 2]))$;
`// Definizione del polinomio SOS di grado due`

Formulazione delle disuguaglianze:
$V = x.' * P * x$;
$l = (x.' * x) * 10^{-6};$
$\text{ineq} = -(2x.' * P * \text{ff}_{sym} + l) + \text{sig} * (V - R);$

Disuguaglianza SOS: $\text{proginit} = \text{sosineq}(\text{proginit}, \text{ineq});$

Risolvi il Programma SOS:
$[\text{proginit}, \text{INFO}] = \text{sossolve}(\text{proginit});$

Restituisci Solution Found?;

Algorithm 1: Soluzione di un problema di feasibilità SOS per una data P e una data curva di livello R

Se il problema ha una soluzione, cioè esiste un polinomio SOS per cui i vincoli sono soddisfatti, è possibile procedere con l'espansione della curva di livello aumentando γ e procedere a una nuova valutazione. Altrimenti, va ridotto il valore di γ fino a che non si arriva a un valore abbastanza piccolo per cui il problema ammette una soluzione.

La procedura può essere ripetuta per altre Q, ottenendo per ciascuna una nuova P, una nuova V e una nuova stima della RAS data dall'insieme $x^T P x < \gamma$. L'unione di questi insiemi è ovviamente ancora contenuto nella RAS.

Si noti che, rispetto al caso della stima con campionamento, la valutazione della condizione di negatività della derivata temporale della funzione di Lyapunov sulla curva di livello è valutata in maniera analitica, e quindi su tutti i punti dello spazio di stato appartenenti alla curva di livello.

Esempio: Si consideri il seguente sistema dinamico a due stati:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + (x_1^2 - 1)x_2 \end{aligned} \tag{12}$$

Avendo questo sistema una dinamica polinomiale, e un equilibrio asintoticamente stabile nell'origine, è possibile procedere alla stima della RAS utilizzando la procedura di ottimizzazione SOS vista precedentemente. La figura 1 mostra il risultato della stima della RAS combinando 25 diverse funzioni di

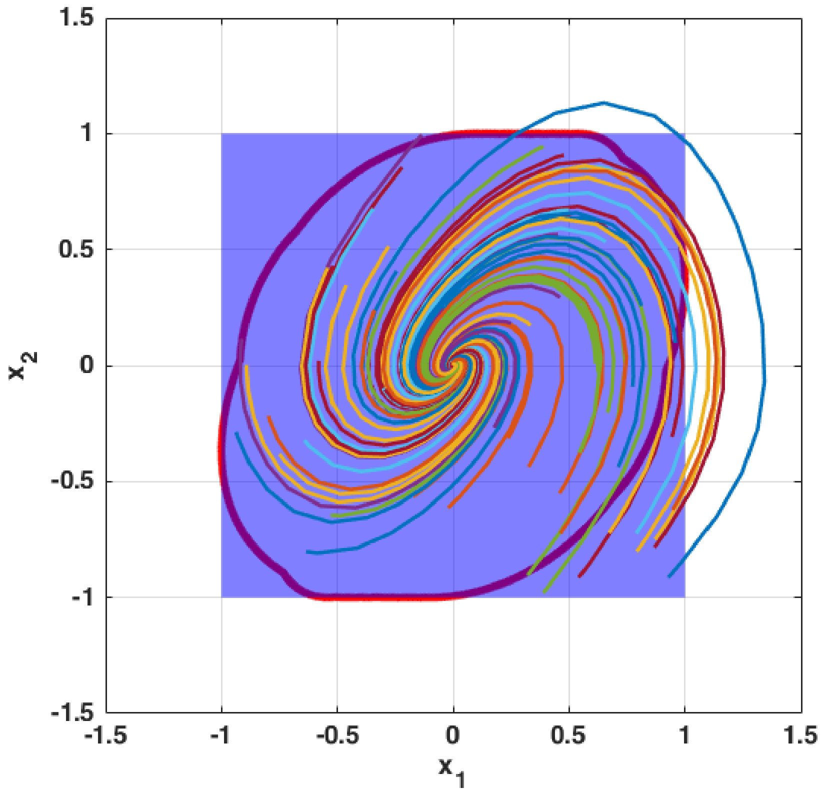

Figure 2: Stima del sottoinsieme vincolato della RAS per il reverse Van Der Pol

Lyapunov quadratiche. Per il problema di SOS, sono stati considerati polinomi $s(x)$ quadratici, e $l(x) = 10^{-6} \cdot x^T x$.

3 Stima della RAS certificata

Abbiamo visto precedentemente che per alcuni sistemi e applicazioni possa essere necessario "certificare" il funzionamento di un sistema all'interno di limiti operativi prefissati. Ipotizzando che questi limiti siano scrivibili nella forma $A_C x \leq b_C$, si tratta di caratterizzare l'insieme delle perturbazioni iniziali a partire dalle quali tutta l'evoluzione futura del sistema rispetti questi vincoli e converga all'equilibrio.

Questo problema può essere risolto trovando una stima della regione di asintotica stabilità del sistema che sia tutta contenuta nella "scatola" multidimensionale caratterizzata dai vincoli $A_C x \leq b_C$.

Questo vincolo può essere espresso aggiungendo un vincolo sulla curva di livello, imponendo cioè che l'insieme $\Omega_{V,\gamma}$ sia completamente contenuto nell'insieme $\{x \in \mathbb{R}^n : A_C x \leq b_C\}$. Questa condizione è scrivibile come:

$$\Omega_{V,\gamma} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : A_C x - b_C \leq 0\} \tag{13}$$

E similmente a quanto fatto per la condizione (5), questa inclusione può essere verificata imponendo un insieme di vincoli più stringenti del tipo:

$$-(A_{C,i}x - b_{C,i}) + s_i(V - \gamma) \geq 0 \ \forall x, \tag{14}$$

dove $s_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è una funzione semidefinita positiva, $A_{C,i}$ è la i-esima riga della matrice A_C, e $b_{C,i}$ rappresenta l'i-esimo elemento del vettore $b_{C,i}$.

Ognuno di questi vincoli può essere riscritto come vincolo di SOS e aggiunto al problema (9)–(11), imponendo

$$s_i(x) \in \Sigma[x] \tag{15}$$
$$-(A_{C,i}x - b_{C,i}) + s_i(x)(V(x) - \gamma) \in \Sigma[x]. \tag{16}$$

In questo modo, sarà possibile ripetere la procedura iterativa vista precedentemente per la massimizzazione di γ data una certa V.

Esempio: Si consideri di nuovo il sistema (12), ma stavolta si consideri che le variabili x_1 ed x_2 siano vincolate a rimanere all'interno dell'intervallo $[-1, 1]$. Questo vincolo è scrivibile nella forma:

$$A_C x - b_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \leq 0 \tag{17}$$

che rappresentano un insieme di 4 vincoli di disuguaglianza.

Possiamo quindi procedere alla stima di un sottoinsieme della RAS che sia interamente contenuto all'interno di questa "box".

Il risultato dell'ottimizzazione SOS, a cui sono aggiunti i 4 vincoli di disuguaglianza dati dalle condizioni di funzionamento è visibile in figura 2.